

Matemàtiques

Sèrie 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Siguin la recta $r: (x, y, z) = (5 + k, k, -2 - 2k)$ i els punts $P = (1, 0, -1)$ i $Q = (2, 1, 1)$.
 - a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa pel punt Q i és perpendicular al pla determinat per la recta r i el punt P .
[1 punt]
 - b) Calculeu el punt de la recta r que equidista dels punts P i Q .
[1 punt]
2. Tres nombres, x , y i z , compleixen dues condicions: que el primer és la suma dels altres dos, i que el segon és la suma de la meitat del primer i el doble del tercer.
 - a) Comproveu que el càlcul dels tres nombres, x , y i z , té una infinitat de solucions.
[1 punt]
 - b) Trobeu una expressió general de les solucions.
[1 punt]
3. Volem fer un envàs de gelat amb forma de prisma regular de base quadrada i amb una capacitat de 80 cm^3 . Per a elaborar-ne la tapa i la superfície lateral, farem servir un material determinat que costa 1 €/cm^2 , però per a la base haurem d'utilitzar un material que és un 50 % més car.
 - a) Si x és la mesura, en cm, del costat de la base, comproveu que la funció que determina el preu de l'envàs és $P(x) = 2,5x^2 + \frac{320}{x}$.
[1 punt]
 - b) Calculeu les mides que ha de tenir l'envàs perquè el preu sigui el mínim possible.
[1 punt]

4. Sigui la funció $f(x) = \sin(x)$.
- a) Calculeu l'equació de les rectes tangents a la funció f en els punts d'abscissa $x = 0$ i $x = \pi$, respectivament. Trobeu les coordenades del punt en què es tallen les dues rectes.
[1 punt]
- b) Calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de la funció f i les rectes tangents de l'apartat anterior (en cas de no haver resolt l'apartat anterior, suposeu que les rectes són $y = x$ i $y = -x + \pi$, respectivament).
[1 punt]

5. Responen a les qüestions següents:

- a) Trobeu l'única matriu de la forma $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ a & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ que satisfà que $A^2 = A$, i comproveu que A i $A - I$ no són invertibles.
[1 punt]
- b) Justifiqueu raonadament que si A és una matriu quadrada d'ordre n diferent de la matriu nul·la, 0 , i de la matriu identitat, I , i satisfà la igualtat $A^2 = A$, aleshores les matrius A i $A - I$ no són invertibles.
[1 punt]

6. Responen a les qüestions següents:

- a) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa pel punt de coordenades $(0, 0, 1)$ i és perpendicular als plans $3x + y - z = 1$ i $x + y + 2z = 5$.
[1 punt]
- b) Suposeu que un pla π_1 és perpendicular a un segon pla π_2 i que el pla π_2 és a la vegada perpendicular a un tercer pla π_3 . Expliqueu raonadament si necessàriament els plans π_1 i π_3 han de ser perpendiculars entre ells.
[1 punt]



Institut
d'Estudis
Catalans

