



# Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2015

---

## Matemàtiques

### Sèrie 2

---

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

---

1. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\left. \begin{array}{l} -3x + 2y + 3z = 0 \\ (a - 2)y - 3z = 0 \\ -x - y + (-a - 3)z = 0 \end{array} \right\}$$

a) Calculeu per a quins valors del paràmetre  $a$  el sistema té més d'una solució.

[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas  $a = -3$ .

[1 punt]

2. Sigui  $r$  la recta de l'espai que té per equació  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = z$  i sigui  $P$  el punt de coordenades  $(6, 0, -1)$ .

a) Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma  $Ax + By + Cz = D$ ) del pla que passa pel punt  $P$  i talla perpendicularment la recta  $r$ .

[1 punt]

b) Trobeu l'equació paramètrica del pla que passa pel punt  $P$  i conté la recta  $r$ .

[1 punt]

3. Responeu a les qüestions següents:

a) Determineu l'equació de la recta tangent a la corba  $y = x^3$  en el punt d'abscissa  $x = 2$ .

[1 punt]

b) Calculeu l'àrea de la regió plana finita limitada per la corba  $y = x^3$  i la recta  $y = 3x - 2$ .

[1 punt]

4. Considereu a  $\mathbb{R}^3$  la recta que té per equació  $r: (x, y, z) = (-4 + 2\lambda, -2, 1 - \lambda)$  i els plans  $\pi_1$  i  $\pi_2$  d'equacions  $\pi_1: x + 2y + 2z = -1$  i  $\pi_2: x - 2y + 2z = -3$ , respectivament.

a) Determineu la posició relativa de  $\pi_1$  i  $\pi_2$ .

[1 punt]

b) Comproveu que tots els punts de la recta  $r$  estan situats a la mateixa distància dels plans  $\pi_1$  i  $\pi_2$ .

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades  $(x_0, y_0, z_0)$  al pla d'equació

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ amb l'expressió } \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

5. Responeu a les qüestions següents:

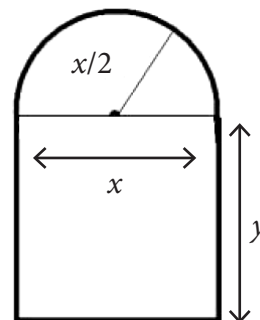
a) Calculeu la matriu de la forma  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  que satisfà  $A^2 - A = I$ , en què  $I$  és la matriu identitat,  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

[1 punt]

b) Calculeu  $A^{-1}$  i comproveu que el resultat es correspon amb el que obteniu de deduir la matriu  $A^{-1}$  a partir de la igualtat  $A^2 - A = I$ .

[1 punt]

6. La portalada d'una catedral està formada, en la part superior, per un arc de mitja circumferència que recolza sobre dues columnes, com il·lustra la figura adjunta, en què  $x$  és el diàmetre de la circumferència, és a dir, la distància entre columnes, i  $y$  és l'alçària de cada columna.



a) Comproveu que la funció  $f(x, y) = \frac{\pi x^2}{8} + xy$  determina l'àrea d'aquesta portalada.

[1 punt]

b) Si el perímetre de la portalada fa 20 m, determineu les mides  $x$  i  $y$  de la portalada que en maximitzen l'àrea.

[1 punt]



Institut  
d'Estudis  
Catalans



## Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2015

---

### Matemàtiques

#### Sèrie 4

---

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

---

1. Considereu el sistema d'equacions 
$$\left. \begin{array}{l} x - 2y - z = 0 \\ -mx + 3y + z = 0 \\ x + y = 4 \end{array} \right\}$$
, en què  $m$  és un paràmetre real.
- a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre  $m$ .  
[1 punt]
- b) Resoleu el sistema per a  $m = 1$ .  
[1 punt]
2. Sigui la funció  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ .
- a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció  $f$  en el punt d'abscissa  $x = 1$ .  
[1 punt]
- b) Calculeu les abscisses dels punts de la gràfica en què hi ha un mínim relatiu, un màxim relatiu o una inflexió.  
[1 punt]
3. Sigui el punt  $P = (2, 0, 2)$  i el pla  $\pi$  d'equació  $x - y + z = 1$ .
- a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa pel punt  $P$  i és perpendicular al pla  $\pi$ .  
[1 punt]
- b) Calculeu la distància del punt  $P$  al pla  $\pi$ .  
[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades  $(x_0, y_0, z_0)$  al pla d'equació

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ amb l'expressió } \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

4. Sigui  $f$  la funció  $f(x) = x \cdot \sin(x)$ . Calculeu la primitiva de la funció  $f$  que passa pel punt  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  (unitats en radians).

[2 punts]

5. Sigui  $A$  una matriu quadrada que compleix que  $A^3 = I$ , en què  $I$  és la matriu identitat,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Demostreu que la matriu  $A$  té inversa i que  $A^{-1} = A^2$ .

[1 punt]

- b) En el cas de  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ , calculeu si hi ha cap valor del paràmetre  $a$  per al qual  $A^3 = I$ .

[1 punt]

6. Siguin a  $\mathbb{R}^3$  el punt  $P = (2, 3, 3)$  i la recta  $r: (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, 1, 1)$ .

- a) Calculeu l'equació paramètrica del pla que passa pel punt  $P$  i conté la recta  $r$ .

[1 punt]

- b) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma  $Ax + By + Cz = D$ ) del pla que passa pel punt  $P$  i és perpendicular a la recta  $r$ .

[1 punt]



Institut  
d'Estudis  
Catalans