

SÈRIE 1

1.- Sigui $V = \{(-1, 1, 1), (-2, -1, 0), (1, 2, a)\}$ un conjunt de vectors de \mathbb{R}^3 .

(a) Trobeu el valor o valors de a perquè V sigui linealment dependent.

(b) Quan $a = 4$, expresseu el vector $\vec{v} = (3, 9, 14)$ com a combinació lineal dels vectors de V .

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Hi ha diferents formes de comprovar la dependència lineal de V . Per exemple, podem calcular el determinant de la matriu formada pels tres vectors,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix} \implies \det A = 3a - 3.$$

Aquest determinant val zero si i sol el conjunt V és linealment dependent. Com que l'equació $3a - 3 = 0$ té per solució $a = 1$, aquest és el valor demanat.

Podem buscar també el rang de la matriu A , que haurà de ser menor que 3 si volem que el conjunt V sigui linealment dependent

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & a+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & a+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix}.$$

Les transformacions elementals realitzades han estat: (1) $F_2 + F_1$ i $F_3 + F_1$; (2) $F_2/3$ (3) $F_3 - 2F_2$.

El rang de la matriu A és diferent de tres si i sol si $a = 1$.

Un altre camí de resolució és utilitzar directament la definició de conjunt linealment dependent. Cal plantejar l'equació vectorial

$$\alpha(-1, 1, 1) + \beta(-2, -1, 0) + \gamma(1, 2, a) = (0, 0, 0).$$

Si podem trobar valors per a les variables α , β i γ que no siguin tots nuls, el conjunt V serà linealment dependent. Ens queda el sistema

$$\left. \begin{aligned} -\alpha - 2\beta + \gamma &= 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma &= 0 \\ \alpha + a\gamma &= 0 \end{aligned} \right\}$$

De la tercera equació en traiem que $\alpha = -a\gamma$. Portant aquest valor a les altres dues,

$$\left. \begin{aligned} -2\beta + (a+1)\gamma &= 0 \\ -\beta + (2-a)\gamma &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Aïllant el valor de β a la segona d'aquestes equacions i substituint-lo a la primera obtenim $(-3+3a)\gamma = 0$. Com que volem que $\gamma \neq 0$ (si aquesta variable fos nul·la també ho serien les altres dues), necessitem que $-3+3a = 0$; és a dir, $a = 1$.

La qüestió es pot resoldre també buscant el valor del paràmetre a perquè el tercer vector sigui combinació lineal dels altres dos (amb la qual cosa el conjunt V seria linealment dependent).

$$\alpha(-1, 1, 1) + \beta(-2, -1, 0) = (1, 2, a) \implies \alpha = 1, \beta = -1, a = 1.$$

(b) Plantegem l'equació vectorial $\alpha(-1, 1, 1) + \beta(-2, -1, 0) + \gamma(1, 2, 4) = (3, 9, 14)$, que ens porta al sistema d'equacions lineals

$$\left. \begin{aligned} -\alpha - 2\beta + \gamma &= 3 \\ \alpha - \beta + 2\gamma &= 9 \\ \alpha + 4\gamma &= 14 \end{aligned} \right\},$$

Aquest sistema té per solució $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = 3$. Per tant, la resposta a aquest apartat és

$$\vec{v} = 2(-1, 1, 1) - (-2, -1, 0) + 3(1, 2, 4).$$

PAUTES DE CORRECCIÓ

Apartat (a)

0,5 punts per plantejar qualsevol dels mètodes descrits (o per un altre si és correcte).

0,5 punts per arribar al valor de $a = 1$.

Apartat (b)

0,5 punts pel planteig de l'equació vectorial a resoldre o si escriuen directament el sistema d'equacions lineals.

0,25 punts per trobar el valor dels coeficients.

0,25 punts per posar el vector \vec{v} igual a la combinació lineal dels vectors de V .

2.- De la funció polinòmica $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ sabem que

▪ té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -3$.

▪ la integral definida en l'interval $[0, 1]$ val $-\frac{5}{4}$.

Calculeu el valor dels paràmetres a i b .

[2 punts]

Solució

Si la funció té un extrem relatiu en el punt on $x = -3$ sabem que $P'(-3) = 0$. Com que $P'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, ens queda l'equació

$$3(-3)^2 + 2a(-3) + b = 0.$$

Per altra banda, tenim que

$$\int_0^1 (x^3 + ax^2 + bx + 2)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + 2x \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 2 = -\frac{5}{4}.$$

En definitiva, hem obtingut el sistema

$$\left. \begin{array}{l} -6a + b = -27 \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = -\frac{7}{2} \end{array} \right\},$$

que té per solució $a = 3$ i $b = -9$.

PAUTES DE CORRECCIÓ

0,5 punts per saber interpretar la condició per tenir un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -3$.

0,25 punts pel planteig de la integral.

0,5 punts pel càlcul de la primitiva.

0,25 punts per l'aplicació de la regla de Barrow, arribant a la segona equació.

0,5 punts per la resolució del sistema.

3.- Donats el pla $\pi: x + 2y - z = 3$ i la recta $r: \frac{x-1}{2} = y = \frac{z+m}{4}$,

(a) *Comproveu que el vector característic (o normal) de π i el vector director de r són perpendiculars.*

(b) *Estudieu la posició relativa de π i r en funció del paràmetre m .*

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) El vector característic del pla és $v_\pi = (1, 2, -1)$; el vector director de la recta és $v_r = (2, 1, 4)$. Aquests vectors seran perpendiculars si i sol si el seu producte escalar és nul.

$$(1, 2, -1) \cdot (2, 1, 4) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 = 2 + 2 - 4 = 0,$$

(b) Tenint en compte l'apartat anterior, la recta i el pla solament poden ser paral·lels o incidents (la recta està continguda dins del pla). En aquest segon cas, qualsevol punt de la recta ha de complir l'equació del pla. Agafem el punt $P = (1, 0, -m)$; aquest punt pertany al pla si i sol si $1 + 2 \cdot 0 - (-m) = 3$; és a dir, si i sol si $m = 2$.

En definitiva, si $m = 2$, la recta està continguda al pla; si $m \neq 2$, la recta i el pla són paral·lels.

PAUTES DE CORRECCIÓ

Apartat a

0,5 punts per localitzar el vector característic del pla i el director de la recta.

0,25 punts per efectuar el producte escalar.

0,25 punts per concloure que són perpendiculars perquè el seu producte escalar val zero.

Apartat b

0,5 punts per raonar, a la vista del resultat anterior, que el pla i la recta solament poden ser paral·lels o incidents (recta continguda al pla).

0,25 punts per raonar que, si són incidents, qualsevol punt de la recta ha de ser del pla.

0,25 punts per arribar al valor $m = 2$ i discutir quina és la posició relativa en funció de m .

4.- *Siguin les matrius $A = \begin{bmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & b & 4 \\ 3 & c & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & b & 8 \\ 1 & c & 3 \\ 4 & a & 3 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -1 & 5 & 5 \\ -b & -a & -2 \end{bmatrix}$, on a, b i c són paràmetres reals. Calculeu el valor d'aquests paràmetres perquè cap de les tres matrius tingui inversa.*

[2 punts]

Solució

Una matriu quadrada no té inversa si i sol si el seu determinant val zero. Tenim

$$\det A = 7a + 7b - 7c; \quad \det B = -7a + 9b - 17c; \quad \det C = 17a + 15b - 28.$$

Les tres matrius seran no invertibles quan el valor de cada paràmetre sigui la solució del sistema

$$\left. \begin{array}{l} 7a + 7b - 7c = 0 \\ -7a + 9b - 17c = 0 \\ 17a + 15b = 28 \end{array} \right\},$$

és a dir, quan $a = -1$, $b = 3$ i $c = 2$.

PAUTES DE CORRECCIÓ

0,25 punts per raonar que els determinants han de ser nuls.

0,25 punts pel càlcul de cada un dels determinants ($3 \times 0,25 = 0,75$).

0,5 punts per la construcció del sistema.

0,5 punts per la seva resolució.

5.- Donats el pla $\pi : 2x - y + 3z - 8 = 0$ i el punt $P = (6, -3, 7)$,

(a) Trobeu l'equació contínua de la recta que passa per P i és perpendicular a π .

(b) Trobeu el punt del pla π que està més proper al punt P .

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Podem agafar com a vector director de la recta que busquem el vector característic del pla π ; llavors, l'equació contínua de la recta és

$$\frac{x - 6}{2} = \frac{y + 3}{-1} = \frac{z - 7}{3}.$$

(b) El punt del pla més proper al punt P és el que es troba a la recta perpendicular al pla passant per P . Així, el punt que estem buscant és la solució de les equacions

$$\frac{x - 6}{2} = \frac{y + 3}{-1} = \frac{z - 7}{3}, \text{ juntament amb } 2x - y + 3z - 8 = 0.$$

Hi ha diverses formes de resoldre el sistema. Una d'elles és convertint l'equació contínua de la recta en dues equacions,

$$\frac{x - 6}{2} = \frac{y + 3}{-1} \implies x + 2y = 0; \quad \frac{y + 3}{-1} = \frac{z - 7}{3} \implies 3y + z = -2.$$

Ajuntant aquestes dues equacions amb la del pla ens queda un sistema,

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ 3y + z = -2 \\ 2x - y + 3z = 8 \end{array} \right\},$$

que té per solució $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$.

Una altra forma és passar l'equació de la recta a la forma paramètrica,

$$x = 6 + 2\lambda, \quad y = -3 - \lambda, \quad z = 7 + 3\lambda,$$

i substituir aquests valors a l'equació del pla,

$$2x - y + 3z - 8 = 0 \implies 2(6 + 2\lambda) - (-3 - \lambda) + 3(7 + 3\lambda) - 8 = 0 \implies 14\lambda + 28 = 0 \implies \lambda = -2.$$

Les coordenades del punt són $x = 6 + 2(-2) = 2$, $y = -3 - (-2) = -1$, $z = 7 + 3(-2) = 1$.

D'una manera o altra, el punt buscat és $Q = (2, -1, 1)$.

PAUTES DE CORRECCIÓ

Apartat a

0,5 punts per raonar que podem agafar com a vector director de la recta el vector característic del pla.

0,5 punts per l'equació en forma contínua de la recta. Encara que és difícil que ho facin, si donen com a solució qualsevol altra forma de l'equació de la recta, comteu solament 0,25 punts.

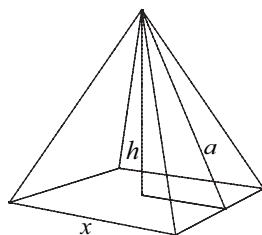
Apartat b

0,5 punts per raonar que el punt buscat és la intersecció entre el pla π i la recta trobada a l'apartat anterior.

0,5 punts per trobar el punt més proper.

Si es "llancen" a fer el punt d'intersecció sense explicar el perquè, no comteu res d'aquest apartat. La raó és que es demana el punt més proper, no el punt d'intersecció.

6.- Volem construir una tenda en forma de piràmide regular de base quadrada. Disposem de 300 m^2 de tela per a la fabricació de les quatre cares de la tenda (se suposa que en l'elaboració de les cares no es perd gens de tela). Designem x la longitud d'un costat de la base de la tenda.



(a) Sabent que el volum d'una piràmide és igual a un terç del producte de l'àrea de la base per l'altura, comproveu que, en aquest cas,

$$V(x) = \frac{x\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}}{6}.$$

(b) Determineu el valor de x perquè el volum sigui el més gran possible (no cal que comproveu que el valor obtingut correspon realment a un màxim).

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Anomenem a a l'altura d'una de les cares de la tenda, tal com està indicat al dibuix. Llavors, la superfície total de les quatre cares de la tenda és $S(x) = 4 \left(\frac{ax}{2} \right) = 2ax$. Com que aquesta superfície és de 300 m^2 , tenim que $2ax = 300$, és a dir, $a = \frac{150}{x}$.

Per altra banda, d'acord amb el teorema de Pitàgores, $a^2 = h^2 + (x/2)^2$. Per tant,

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{150}{x}\right)^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}}{2x}.$$

Amb això,

$$V(x) = \frac{1}{3}x^2h = \frac{x\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}}{6}.$$

(b) Per a determinar el valor de x que fa màxim el volum, hem de derivar la funció volum i determinar els punts on la derivada s'anulli.

$$V'(x) = \frac{1}{6} \left[\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4} + \frac{x}{2\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}} (-4x^3) \right] = \frac{3 \cdot 10^4 - x^4}{2\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}}.$$

Aquesta derivada val zero quan $x = \sqrt[4]{3 \cdot 10^4} = 10\sqrt[4]{3} \simeq 13,1607$.

També es pot treballar amb la funció $f(x) = x^2(9 \cdot 10^4 - x^4)$, resultat d'haver descartat els factors constants i haver elevat al quadrat la funció volum. Amb ella,

$$f'(x) = 18 \cdot 10^4 x - 6x^5; \quad f'(x) = 0 \implies x = 0 \quad \text{o} \quad x = 10\sqrt[4]{3}.$$

La primera d'aquestes solucions és absurda (si $x = 0$ no hi ha tenda) i la segona és la resposta correcta.

PAUTES DE CORRECCIÓ

Apartat a

0,25 punts per la relació $2ax = 300$.

0,25 punts per la relació entre h , a i x .

0,25 punts per trobar el valor de h en funció de x .

0,25 punts per l'expressió definitiva de la funció volum.

Apartat b

0,5 punts pel càlcul de la derivada, tant si treballen amb $V(x)$ o amb la funció "quadrat", $f(x)$.

0,5 punts per trobar el valor de x .