SÈRIE 4

1.- Sabem que el vector $(2,1,-1)$ ***és solució del sistema***

$$\left.\begin{array}{rl} ax + by + cz = & a+c \\ bx - y + bz = & a-b-c \\ cx - by + 2z = & b \end{array}\right\} .$$

Calculeu el valor dels paràmetres a***,*** b ***i*** c***.***

[2 punts]

Solució

Si $(2,1,-1)$ és solució del sistema, s'ha de complir que

$$\left.\begin{array}{rl} 2a+b-c = & a+c \\ 2b-1-b = & a-b-c \\ 2c-b-2 = & b \end{array}\right\} ,$$

que és un sistema d'equacions on a, b i c són les variables. La seva solució és $a=3$, $b=1$, $c=2$.

2.- La corba $y=x^2$ ***i la recta*** $y=k$***, amb*** $k>0$***, determinen una regió plana.***

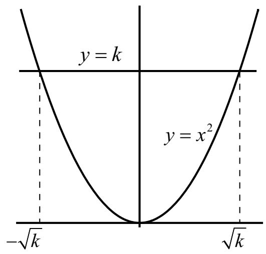
(a) ***Calculeu l'àrea d'aquesta regió en funció del paràmetre*** k***.***

(b) ***Trobeu el valor de*** k ***perquè l'àrea limitada sigui*** $\sqrt{6}\,u^2$***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

La gràfica de la situació descrita és



(a) Les abscisses dels punts d'intersecció entre la corba i la recta són $x=\pm\sqrt{k}$. Per tant, per a qualsevol valor de k,

$$A=\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}}\left(k-x^2\right)\,dx=\left[kx-\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}}=\frac{4k\sqrt{k}}{3}.$$

(b) Volem que $\dfrac{4k\sqrt{k}}{3}=\sqrt{6}$. Elevant al quadrat els dos membres d'aquesta equació ens queda

$$\frac{16k^3}{9}=6\Longrightarrow k=\frac{3}{2}.$$

3.- *Sigui* $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ p & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$.

(a) ***Què significa que la matriu*** B ***sigui la inversa de*** A***?***

(b) ***Trobeu el valor del paràmetre*** p ***perquè la matriu inversa de*** A ***i la seva matriu transposada coincideixin.***

*Nota**: no aproximeu les arrels per valors amb decimals; treballeu amb els radicals.***

[0,5 punts per l'apartat a; 1,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) La matriu B és la inversa de la matriu A si i sol si $A \cdot B = I$ i $B \cdot A = I$, on I és la matriu identitat del mateix ordre que la matriu A (i B).

(b) **Solució 1**

La forma més senzilla de resoldre el problema és realitzar el producte de la matriu A per la seva transposada i igualar el resultat a la identitat.

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ p & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & p \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{p}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{p}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} & 0 & p^2 + \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per tant, s'ha complir que $p/\sqrt{2} - 1/2 = 0$ i que $p^2 + 1/2 = 1$. La solució comuna a aquestes dues equacions és $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Solució 2

Evidentment, la qüestió es pot resoldre també trobant la matriu inversa de A i igualar el resultat a la matriu A^T. Com que

$$A^{-1} = \frac{1}{-\left(\frac{p}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2p}{\sqrt{6}} & -\frac{p\sqrt{6}+\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{p}{\sqrt{3}} & \frac{p\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix},$$

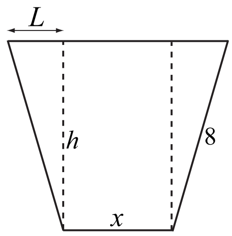
la igualació $A^{-1} = A^T$ dóna lloc a vuit equacions. Una d'elles,

$$\frac{1}{-\left(\frac{p}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ens permet assegurar que $p = 1/\sqrt{2}$. S'ha de comprovar que aquest valor fa que els altres equacions es converteixin en identitats.

És clar que aquesta segona forma de resoldre la qüestió és bastant més llarga i propensa a equivocacions.

4.- Es vol construir un canal que tingui com a secció un trapezi isòsceles de manera que l'amplada superior del canal sigui el doble de l'amplada inferior i que els costats no paral·lels siguin de 8 metres. Sota hi teniu un esquema de la secció del canal.



(a) ***Trobeu el valor del segment assenyalat com a L en el dibuix, en funció de la variable x (amplada inferior del canal).***

(b) ***Sabem que l'àrea d'un trapezi és igual a la seva altura multiplicada per la semisuma de les seves bases. Comproveu que, en aquest cas, l'àrea de la secció ve donada per***

$$A(x) = \frac{3x\sqrt{256 - x^2}}{4}\,.$$

(c) ***Calculeu el valor de x perquè l'àrea de la secció del canal sigui màxima (no cal que comproveu que és realment un màxim).***

[0,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b; 1 punt per l'apartat c]

Solució

(a) Siguin $b_1 = x$ i $b_2 = 2x$ les dues bases del trapezi. Es compleix que $L + b_1 + L = b_2$. Per tant, $L = x/2$.

(b) L'altura del trapezi, d'acord amb el teorema de Pitàgores, compleix que $h^2 + L^2 = 8^2$. D'aquí se'n dedueix que

$$h(x) = \frac{\sqrt{256 - x^2}}{2}\,.$$

Llavors, l'àrea és

$$A(x) = \frac{b_1 + b_2}{2}\,h = \frac{3x}{2} \cdot \frac{\sqrt{256 - x^2}}{2} = \frac{3x\sqrt{256 - x^2}}{4}\,,$$

tal com volíem.

(c) La derivada de la funció $A(x)$ és

$$A'(x) = \frac{3}{4}\left[\sqrt{256 - x^2} + \frac{x}{2\sqrt{256 - x^2}}\,(-2x)\right] = \frac{3(256 - 2x^2)}{4\sqrt{256 - x^2}}\,.$$

Llavors, $A'(x) = 0$ implica que $x = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$.

També és possible treballar amb la funció $f(x) = x^2(256 - x^2)$, resultat d'haver elevat la funció àrea al quadrat i haver eliminar els factors constants.

5.- Donats els punts $P=(1,0,-1)$ i $Q=(-1,2,3)$, trobeu un punt R de la recta $r: \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+4}{3} = \dfrac{z-3}{-1}$ tal que el triangle de vèrtexs P, Q, R és isòsceles, essent $\overline{PR}$ i $\overline{QR}$ els costats iguals del triangle.

[2 punts]

Solució 1

El punt R de la recta és de la forma $R=(-3+2\lambda,-4+3\lambda,3-\lambda)$ (equacions paramètriques de la recta). Volem que $d(P,R)=d(Q,R)$.

$$d(P,R) = \sqrt{(-3+2\lambda-1)^2+(-4+3\lambda-0)^2+(3-\lambda+1)^2} = \sqrt{14\lambda^2-48\lambda+48}\,;$$
$$d(Q,R) = \sqrt{(-3+2\lambda+1)^2+(-4+3\lambda-2)^2+(3-\lambda-3)^2} = \sqrt{14\lambda^2-44\lambda+40}\,.$$

Cal que $14\lambda^2-48\lambda+48 = 14\lambda^2-44\lambda+40$. La solució d'aquesta equació és $\lambda=2$. El punt buscat és $R=(1,2,1)$.

Solució 2

Busquem l'equació del pla que passa pel punt mig del segment $\overline{PQ}$ amb vector característic $\overrightarrow{PQ}$; tots els punts d'aquest pla equidisten de P i Q. Després es busca la intersecció entre aquest pla i la recta r.

Punt mig: $M=\dfrac{P+Q}{2}=(0,1,1)$.

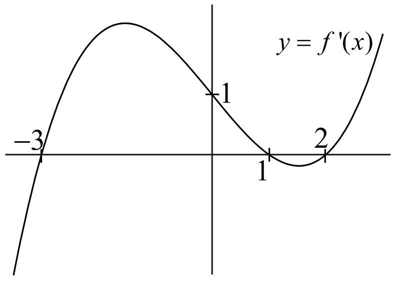
Vector característic: $\overrightarrow{PQ}=Q-P=(-2,2,4)$.

Equació del pla: $-2(x-0)+2(y-1)+4(z-1)=0 \Longrightarrow x+y+2z+3=0$.

Substituint l'expressió general dels punts de la recta r, $R=(-3+2\lambda,-4+3\lambda,3-\lambda)$ en l'equació del pla, obtenim que $\lambda=2$, igual que en l'apartat anterior.

També es pot acabar aquest segon procediment resolent el sistema d'equacions lineals format per dues equacions obtingudes de la recta r i l'equació del pla que hem trobat.

6.- La funció $f(x)$ és derivable i passa per l'origen de coordenades. La gràfica de la seva funció derivada és la que veieu aquí dibuixada, essent $f'(x)$ creixent als intervals $(-\infty,-3]$ i $[2,+\infty)$.



(a) **Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x=0$.**

(b) ***Indiqueu les abscisses dels extrems relatius de la funció $f(x)$, classificant aquests extrems.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) L'equació de la recta tangent a la gràfica de $y = f(x)$ en el punt d'abscissa a és $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. De l'enunciat, sabem que $f(0) = 0$ ("passa per l'origen de coordenades") i de la gràfica en deduïm que $f'(0) = 1$. Llavors, l'equació de la recta buscada és $y = 0 + 1(x - 0)$; és a dir, $y = x$.

(b) Com que la funció $f(x)$ és derivable, els punts candidats a ser els seus extrems relatius tindran la derivada igual a zero. D'acord amb el gràfic, les abscisses d'aquests punts són $x_1 = -3$, $x_2 = 1$ i $x_3 = 2$.

• En $x_1 = -3$ hi tenim un mínim, ja que en ell la funció derivada passa de ser negativa a ser positiva (és a dir, la funció $f(x)$ passa de ser decreixent a ser creixent).

• En $x_2 = 1$ hi ha un màxim. En efecte, la derivada passa de ser positiva (funció creixent) a ser negativa (funció decreixent).

• En $x_3 = 2$ torna a haver un mínim, per la mateixa raó que en x_1.

SÈRIE 3

1.- Sigui $\pi : 3x - 2y + z = 10$ **.**

(a) ***Trobeu l'equació contínua de la recta*** r ***perpendicular a*** π ***que passa pel punt*** $P = (-1, 3, 2)$**.**

(b) ***Trobeu també l'equació cartesiana (és a dir, de la forma*** $Ax + By + Cz + D = 0$***) del pla*** π_1 ***paral·lel a*** π ***que passa pel mateix punt*** P***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Podem agafar com a vector director de la recta el vector característic del pla. Amb això,

$$r : \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{1} \,.$$

(b) Els plans paral·lels a π tenen per equació $3x - 2y + z + D = 0$. Com que ha de passar pel punt P, cal que

$$3(-1) - 2 \cdot 3 + 2 + D = 0 \,.$$

D'aquí, $D = 7$. L'equació cartesiana del pla π_1 és $3x - 2y + z + 7 = 0$.

També es pot utilitzar la fórmula $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$; és a dir,

$$3(x+1) - 2(y-3) + (z-2) = 0 \,.$$

2.- Considereu la matriu $A = \begin{bmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{bmatrix}$***. Sigui*** I_2 ***la matriu identitat d'ordre 2 .***

(a) ***Trobeu el valor del paràmetre*** a ***perquè es compleixi que*** $A^2 - 2A = I_2$ ***.***

(b) ***Calculeu la matriu inversa de la matriu*** A ***quan*** $a = -2$ ***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Tenim que

$$A^2 - 2A = \begin{bmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2-4a+4 & 2a-2 \\ 2a-2 & a^2 \end{bmatrix} .$$

Perquè $A^2 - 2A = I$ cal que $a^2 - 4a + 4 = 1$, $2a - 2 = 0$, $a^2 = 1$. De la segona equació en deduïm que $a = 1$. Això sí: cal comprovar que aquest valor també és solució de les altres dues equacions.

(b) Comprovem primer si la matriu $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ és invertible, calculant el seu determinant.

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3)(-1) - 1 \cdot 1 = 2 \neq 0 \,.$$

Com que el determinant és no nul, la matriu és invertible.

Per a calcular la inversa, podem utilitzar diferents mètodes:

- Mètode dels adjunts,

$$A_{11} = -1\,; \quad A_{12} = -1\,; \quad A_{21} = -1\,; \quad A_{22} = -3 \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} .$$

• Mètode de Gauss,

$$\left[\begin{array}{rr|rr} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$
$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & -3/2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & -3/2 \end{array}\right]$$

D'aquí, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -3/2 \end{bmatrix}$.

• Recordant que si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, llavors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

3.- Donada la funció $f(x) = \sqrt{x-1}$ i la recta horitzontal $y = k$, amb $k > 0$,

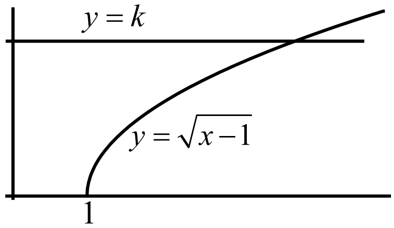
(a) ***Feu un esbós del recinte limitat per les gràfiques de la funció i la recta, i els eixos de coordenades.***

(b) ***Trobeu el valor de k sabent que l'àrea d'aquest recinte és igual a $14/3$.***

[0,5 per l'apartat a; 1,5 per l'apartat b]

Solució

(a) L'esquema demanat és a la figura que es troba a la pàgina següent.



(b) La gràfica de $f(x)$ talla a l'eix d'abscisses en el punt $(1,0)$. Busquem el punt de tall entre la gràfica de la funció i la de la recta,

$$\sqrt{x-1} = k \Longrightarrow x = k^2 + 1\,.$$

L'àrea del recinte és igual a l'àrea del rectangle de base k^2+1 i altura k menys l'àrea que deixa "per sota" la gràfica de la funció; és a dir,

$$A = k(k^2+1) - \int_1^{k^2+1} (x-1)^{1/2}\,dx = k^3 + k - \left[\frac{(x-1)^{3/2}}{3/2}\right]_1^{k^2+1} = k^3 + k - \frac{2k^3}{3} = \frac{k^3}{3} + k.$$

Naturalment, el càlcul també es pot fer com

$$A = \int_0^{k^2+1} k\,dx - \int_1^{k^2+1} (x-1)^{1/2}\,dx = [kx]_0^{k^2+1} - \left[\frac{(x-1)^{3/2}}{3/2}\right]_1^{k^2+1} = k^3 + k - \frac{2k^3}{3} = \frac{k^3}{3} + k.$$

Igualment, el càlcul de la integral de la funció $f(x)$ entre 1 i k^2+1 es pot realitzar pel canvi de variable $x - 1 = t^2$ (d'on $dx = 2t\,dt$). En aquest cas, però, serà necessari fer el canvi de límits d'integració corresponent,

$$\int_1^{k^2+1} \sqrt{x-1}\,dx = \int_0^k \sqrt{t^2}\,2t\,dt = 2\int_0^k t^2\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^k = \frac{2k^3}{3}\,.$$

S'admet també com a correcte el realitzar la primitiva (la integral sense definir) i avaluar-la posteriorment.

$$\int \sqrt{x-1}\,dx = \cdots = \frac{2t^3}{3} + C = \frac{2\left(\sqrt{x-1}\right)^3}{3} + C \Longrightarrow \int_1^{k^2+1} \sqrt{x-1}\,dx = \left[\frac{2\left(\sqrt{x-1}\right)^3}{3}\right]_1^{k^2+1} = \frac{2k^3}{3}\,.$$

L'equació $\dfrac{k^3}{3} + k = \dfrac{14}{3}$ es pot escriure també com $k^3 + 3k - 14 = 0$, que té com a única solució (buscada amb el mètode de Ruffini) $k = 2$.

4.- Un triangle d'àrea $3/2$ té dos dels seus vèrtexs als punts $P = (0,0,0)$ i $Q = (2,0,1)$. El tercer vèrtex, R, és un punt de la recta

$$r : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

i té la primera coordenada no nul·la. Calculeu les coordenades del vèrtex R.

[2 punts]

De les equacions que defineixen la recta r, es dedueix que qualsevol punt de la recta ha de ser, per exemple, de la forma $R = (-1-z, 1, z)$ (també és possible, evidentment, posar $R = (x, 1, -1-x)$). Hi ha altres formes d'arribar a la mateixa expressió, tal com buscar el vector director de la recta r,

$$v_r = (1,1,1) \times (0,1,0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -i + k = (-1, 0, 1)\,,$$

un punt de la recta, com $A = (-1, 1, 0)$ (i molts altres), i construir les equacions paramètriques de la recta, $x = -1 - \lambda$, $y = 1$, $z = \lambda$; amb això, $R = (-1-\lambda, 1, \lambda)$.

Una vegada localitzat el punt R, hi ha al menys dos camins per acabar el problema.

Solució 1

L'àrea d'un triangle de vèrtexs P, Q i R es pot calcular mitjançant la fórmula $A = \dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\|$. Amb això,

$$A = \frac{1}{2}\|(2,0,1) \times (-1-z, 1, z)\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ -1-z & 1 & z \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\|(-1, -3z-1, 2)\| = \frac{1}{2}\sqrt{9z^2 + 6z + 6}\,.$$

Volem que aquesta àrea sigui $3/2$. Per tant, cal resoldre l'equació $\sqrt{9z^2+6z+6} = 3$. Elevant al quadrat i realitzant les operacions adequades, arribem a l'equació $9z^2 + 6z - 3 = 0$, que té com a solucions $z = -1$ i $z = 1/3$.

D'entrada, doncs, hi ha dos possibles punts R,

$$R_1 = (0, 1, -1) \text{ i } R_2 = \left(-\frac{4}{3}, 1, \frac{1}{3}\right).$$

D'acord amb l'enunciat, ens hem de quedar amb el que té la primera component no nul·la. És a dir, $R = (-4/3, 1, 1/3)$.

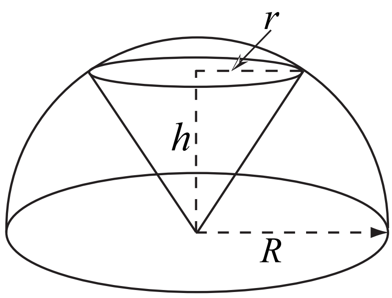
Solució 2

El problema es pot resoldre també buscant una base i l'altura corresponent del triangle. Per exemple, podem fer

$$b = d(P,Q) = \sqrt{2^2+0^2+1^2} = \sqrt{5}\ ; \quad h = d(R,\overline{PQ}) = \frac{\|\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PQ}\|}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \frac{\sqrt{9z^2+6z+6}}{\sqrt{5}}\,.$$

Llavors, $\dfrac{bh}{2} = \dfrac{3}{2}$ ens porta a $\sqrt{9z^2+6z+6} = 3$. A partir d'aquí, se segueix com a la solució 1.

5.- En una semiesfera de radi R inscrivim un con situant el seu vèrtex al centre de la semiesfera, tal com es veu en el dibuix.



(a) ***Sabent que el volum d'un con és igual a l'àrea de la seva base multiplicada per la seva altura i dividida per tres, comproveu que, en aquest cas, podem expressar el volum com $V = \dfrac{\pi\cdot h}{3}\left(R^2-h^2\right)$.***

(b) ***Trobeu les dimensions d'aquest con (radi de la base i altura) perquè el seu volum sigui màxim, comprovant que es tracta realment d'un màxim.***

[0,5 punts per l'apartat a; 1,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) D'acord amb el que se'ns recorda a l'enunciat, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Al dibuix hi podem trobar un triangle rectangle de catets h i r i hipotenusa R. Llavors,

$$h^2 + r^2 = R^2 \Longrightarrow r^2 = R^2 - h^2 \Longrightarrow V(h) = \frac{1}{3}\pi(R^2-h^2)h\,,$$

tal com volíem.

(b) Busquem la derivada de la funció volum respecte de la variable h,

$$V(h) = \frac{\pi}{3}\left(R^2h - h^3\right) \Longrightarrow V'(h) = \frac{\pi}{3}\left(R^2 - 3h^2\right).$$

L'equació $V'(h) = 0$ ens porta a què $h = \pm\dfrac{R}{\sqrt{3}} = \pm\dfrac{R\sqrt{3}}{3}$. No considerem la solució negativa perquè dins del problema no té cap significat.

Amb això, $r = \sqrt{R^2-h^2} = \sqrt{R^2 - \dfrac{R^2}{3}} = R\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{R\sqrt{6}}{3}$.

Per comprovar que és realment un màxim, calculem la derivada segona de la funció volum, $V''(h) = -2\pi h$, i analitzem el seu signe en el valor trobar per a l'altura. Com que $V''\left(\frac{R\sqrt{3}}{3}\right) < 0$, es tracta d'un màxim.

La comprovació que és un màxim es pot realitzar també estudiant el signe de la primera derivada abans i després del valor trobat per a h (abans ha de ser positiva i després negativa).

6.- Sigui $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Sabem que la gràfica d'aquesta funció és tangent a la recta $r : y = x + 3$ en el punt d'abscissa $x = -1$ i que en el punt d'abscissa $x = 1$ la recta tangent és paral·lela a la recta r.

Calculeu el valor dels paràmetres a, b i c.

[2 punts]

Solució

Una recta és tangent a una corba en un punt si recta i corba tenen el mateix valor i la mateixa derivada en el punt. Per tant,

$$f(-1) = 2 \quad \text{i} \quad f'(-1) = 1\,.$$

El que en $x = 1$ la tangent sigui paral·lela a la recta que ens han donat (és a dir, que aquesta nova tangent tingui el mateix pendent que $y = x + 3$) ens permet assegurar que $f'(1) = 1$.

Com que $f'(x) = 3x^2 + 2a + b$, tenim que

$$f(-1) = 2 \Longrightarrow -1 + a - b + c = 2\,; \quad f'(-1) = 1 \Longrightarrow 3 - 2a + b = 1\,; \quad f'(1) = 1 \Longrightarrow 3 + 2a + b = 1\,.$$

El sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{array}{rl} a - b + c &= 3 \\ -2a + b &= -2 \\ 2a + b &= -2 \end{array}\right\}$$

té per solució $a = 0$, $b = -2$, $c = 1$.

SÈRIE 5

1.- Siguin π_1 el pla $2x+3y-z=4$ i π_2 el pla $x-2y-4z=10$.

(a) ***Comproveu que els plans π_1 i π_2 són perpendiculars.***

(b) ***Trobeu l'equació contínua de la recta paral·lela als plans π_1 i π_2 i que passa pel punt $P=(-1,3,2)$.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Un vector característic de cada un dels plans és $v_1=(2,3,-1)$ i $v_2=(1,-2,-4)$, respectivament. Els plans són perpendiculars si els seus vectors característics també ho són, és a dir, si el producte escalar dels vectors característics dóna zero.

$$v_1\cdot v_2 = 2\cdot 1+3(-2)+(-1)(-4)=2-6+4=0\,.$$

(b) Si la recta r és paral·lela als dos plans, el seu vector director v_r és perpendicular als vectors característics del dos plans. Per tant, podem agafar

$$v_r=v_1\times v_2=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & -2 & -4\end{vmatrix}=-14i+7j-7k=(-14,7,-7)\,,$$

o qualsevol proporcional a ell com, per exemple, $(2,-1,1)$. L'equació buscada és

$$r:\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{1}\,.$$

2.- La matriu de coeficients d'un sistema d'equacions lineals homogeni és

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3\\ 2 & 1-a & 0\\ 4 & 1 & 2a+2\end{bmatrix}.$$

(a) ***Per a quins valors del paràmetre a el sistema té una sola solució? Quina és aquesta solució única?***

(b) ***Resoleu el sistema si $a=2$.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Els sistemes homogenis (aquells en què tots el termes independents són nuls) són sempre compatibles. Per tant, cal buscar el valor de a perquè sigui determinat. És a dir, els valors de a perquè rang $A=3$. Ho podem fer calculant el determinant d'aquesta matriu.

$$\det A=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3\\ 2 & 1-a & 0\\ 4 & 1 & 2a+2\end{vmatrix}=2a^2+4a-16\,.$$

L'equació $2a^2+4a-16=0$ té com a solucions $a=-4$, $a=2$. Llavors, si $a\neq -4$ i $a\neq 2$, el rang de la matriu A és igual a 3 , el sistema és compatible determinat i l'única solució és la solució trivial, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

També es pot resoldre la qüestió buscant el rang de la matriu A mitjançant el mètode de Gauss,

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 4 & 1 & 2a+2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5-a & 6 \\ 0 & 9 & 2a+14 \end{bmatrix}$$

Aconseguida aquesta nova matriu, el mètode de Gauss es fa bastant feixuc i el millor és imposar la proporcionalitat de les files segona i tercera,

$$\frac{5-a}{9} = \frac{6}{2a+14} \Longrightarrow 2a^2 + 4a - 16 = 0 \Longrightarrow a = 2\,, \quad a = -4$$

Atenció: per imposar la proporcionalitat estem suposant que $a \neq 7$, la qual cosa es confirma quan es resol l'equació. De fet, per a $a = 7$ les files considerades no són proporcionals.

(b) Per $a = 2$, la matriu de coeficients del sistema es transforma en

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 9 & 18 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema $-x + 2y + 3z = 0$, $y + 2z = 0$ és equivalent a l'original. Si prenem z com a paràmetre, la solució és $x = -z$, $y = -2z$.

3.- Donats els punts** $P = (1, -1, 2)$ **,** $Q = (2, 0, 1)$ **i** $R = (3, 2, -1)$**,

(a) ***Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma** $Ax + By + Cz + D = 0$**) del pla que determinen.***

(b) ***Trobeu un punt** S **pertanyent a la recta** $r : \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-5}{-3}$ **, de manera que el tetraedre de vèrtexs** P **,** Q **,** R **,** S **tingui volum 1/2 .***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) L'equació cartesiana del pla, $Ax + By + Cz + D$, ha de ser satisfeta pels tres punts donats. Per tant,

$$\left.\begin{array}{r} A\cdot 1 + B(-1) + C\cdot 2 + D = 0 \\ A\cdot 2 + B\cdot 0 + C\cdot 1 + D \;= 0 \\ A\cdot 3 + B\cdot 2 + C(-1) + D = 0 \end{array}\right\}.$$

La solució d'aquest sistema d'equacions és $A = 0$, $B = -D$, $C = -D$. Fent $D = 1$, l'equació del pla buscat és $y + z - 1 = 0$.

Aquest apartat es pot resoldre d'altres maneres. Per exemple, trobant directament l'equació fent

$$\begin{vmatrix} 2-1 & 3-1 & x-1 \\ 0+1 & 2+1 & y+1 \\ 1-2 & -1-2 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \iff y + z - 1 = 0\,.$$

(b)

Solució 1

El punt S, per pertànyer a la recta r, és de la forma $S = (5+2\lambda, 1-\lambda, 5-3\lambda)$. El volum del tetraedre de vèrtexs P , Q , R i S és

$$V = \frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}\right)\right| = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4+2\lambda \\ 1 & 3 & 2-\lambda \\ -1 & -3 & 3-3\lambda \end{vmatrix}| = \frac{1}{6}|5-4\lambda| \,.$$

Com que volem que $V = 1/2$, ens queda $|5-4\lambda| = 3$. Això ens dóna dues possibilitats:

$$\bullet\ 5-4\lambda = 3\ ; \qquad \bullet\ 5-4\lambda = -3\,.$$

De la primera, $\lambda = \dfrac{1}{2}$ i el punt és $S_1 = \left(6, \dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$; de la segona, $\lambda = 2$ i el punt buscat és $S_2 = (9, -1, -1)$. Com que solament es demana un punt, la solució és qualsevol dels dos punts.

Solució 2

Sigui $S = (x, y, z)$ el punt buscat. El volum dels tetraedre és

$$V = \frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}\right)\right| = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 1 & 3 & y+1 \\ -1 & -3 & z-2 \end{vmatrix}| = \frac{1}{6}|y+z-1|\ ;\ \ V = \frac{1}{2} \iff |y+z-1| = 3\,.$$

De l'expressió contínua de l'equació de la recta se'n treuen dues equacions; per exemple, $x + 2y = 7$, $3y - z = -2$. Amb elles i la que ens proporciona el volum del tetraedre podem muntar dos sistemes,

$$\left.\begin{array}{l} y+z-1 = 3 \\ x+2y = 7 \\ 3y-z = -2 \end{array}\right\}$$

que té per solució $x = 6$, $y = 1/2$, $z = 7/2$, i

$$\left.\begin{array}{l} y+z-1 = -3 \\ x+2y = 7 \\ 3y-z = -2 \end{array}\right\}$$

amb la solució $x = 9$, $y = -1$, $z = -1$.

Solució 3

Ja que tenim l'equació del pla determinat pels punts P, Q i R, podem buscar el volum del tetraedre amb la fórmula $V = \dfrac{A_b \cdot h}{3}$, essent A_b l'àrea del triangle base i h l'altura del tetraedre.

$$A_b = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\| = \|(0,1,1)\| = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

$$h = d(S, \pi) = \frac{|y+z-1|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}} = \frac{|y+z-1|}{\sqrt{2}}\,.$$

Llavors,

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{1}{6}|y+z-1|\,.$$

A partir d'aquí se segueix com a la solució 2 . Evidentment, el procés és igualment correcte agafant $S = (5+2\lambda, 1-\lambda, 5-3\lambda)$.

4.- Per a $x \geq 1$, considereu la funció $f(x) = +\sqrt{x-1}$.

(a) ***Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt d'abscissa igual a 10.***

(b) ***Calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de $f(x)$, la recta d'equació $x = 5$ i l'eix OX.***

[1 punt per cada apartat]

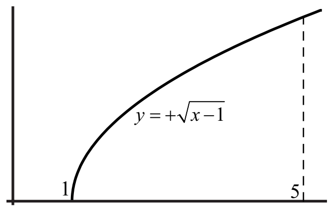
Solució

(a) L'equació de la recta tangent a la gràfica d'una funció $y = f(x)$ en el punt d'abscissa $x = a$ és $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. En el nostre cas, i com que $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$, tenim

$$a = 10\,; \qquad f(10) = \sqrt{10-1} = 3\,; \qquad f'(10) = \frac{1}{2\sqrt{10-1}} = \frac{1}{6}\,.$$

L'equació buscada és $y = 3 + \dfrac{1}{6}(x-10)$ o, en forma implícita, $x - 6y + 8 = 0$.

(b) Busquem la intersecció entre l'eix OX i la corba. L'equació $y = 0$ és la que correspon a aquest eix. Per tant el punt de tall és la solució de $+\sqrt{x-1} = 0$, és a dir, $x = 1$.



L'àrea buscada és

$$A = \int_1^5 \sqrt{x-1}\,dx = \int_1^5 (x-1)^{1/2}\,dx = \left[\frac{(x-1)^{3/2}}{3/2}\right]_1^5 = \frac{2}{3}\,\left[(5-1)^{3/2} - 0\right] = \frac{16}{3}\,.$$

Aquesta integral es pot calcular també per canvi de variable, fent $x - 1 = t^2$. D'aquí, $dx = 2\,dt$, per $x = 1$ la nova variable val $t = 0$ i quan $x = 5$, llavors $t = 2$; per tant,

$$\int_1^5 \sqrt{x-1}\,dx = \int_0^2 \sqrt{t^2}\cdot 2t\,dt = 2\int_0^2 t^2\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{3}\,.$$

Quan es fa el canvi de variable és molt important canviar també els límits.

Si no es vol canviar els límits, es pot treballar la integral com a primitiva ("integral indefinida") i desfer el canvi al final. És a dir,

$$\int \sqrt{x-1}\,dx = \int \sqrt{t^2}\cdot 2t\,dt = 2\int t^2\,dt = \frac{2t^3}{3} + C = \frac{2\left(\sqrt{x-1}\right)^3}{3} + C\,.$$

Amb això,

$$\int_1^5 \sqrt{x-1}\,dx = \left[\frac{2\left(\sqrt{x-1}\right)^3}{3}\right]_1^5 = \frac{2}{3}\left(\left(\sqrt{5-1}\right)^3 - 0\right) = \frac{16}{3}\,.$$

5.- Considereu els punts $A = (-1, 2, 4)$ i $B = (3, 0, -2)$.

(a) **Trobeu l'equació del pla format per tots els punts que equidisten de A i B.**

(b) **Donat un punt $C = (x, y, z)$, dividim el segment $\overline{AC}$ en tres parts iguals, obtenint els punts A, A_1, B i C. Trobeu el punt C.**

[1 punt per cada apartat]

(a) Descriurem dues solucions.

Solució 1

Els punts X que equidisten de A i B compleixen que $d(A, X) = d(B, X)$. És a dir,

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + y^2 + (z+2)^2}\,.$$

Elevant al quadrat els dos membres de l'equació, fent les operacions indicades i les simplificacions adequades, arribem a $2x - y - 3z + 2 = 0$, que és l'equació del pla buscat.

Solució 2

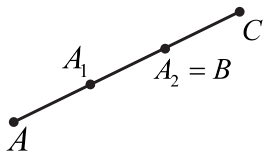
El pla buscat és el que passa pel punt mig del segment $\overline{AB}$, amb vector característic $\overrightarrow{AB}$. El punt mig és $M = \dfrac{A+B}{2} = (1, 1, 1)$, i el vector és $\overrightarrow{AB} = (4, -2, -6)$. L'equació del pla es pot escriure com

$$4(x-1) - 2(y-1) - 6(z-1) = 0\,; \quad \text{és a dir,} \quad 2x - y - 3z + 2 = 0\,.$$

(b) Explicitarem tres solucions.

Solució 1

Quan dividim un segment $\overline{AC}$ en tres parts iguals, obtenim dos nous punts A_1 i A_2 de manera que $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_2C}$.



A l'enunciat ens diuen que $A_2 = B$. Llavors,

$$\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{AA_1} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{AC} = 3 \cdot \overrightarrow{AA_1}\,.$$

D'aquí, $\dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{3}\,\overrightarrow{AC}$.

$$\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\,(B-A) = \frac{1}{2}\,(4,-2,-6) = (2,-1,-3)\,; \quad \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(x+1, y-2, z-4)\,.$$

Finalment, de que $\dfrac{1}{3}(x+1, y-2, z-4) = (2, -1, -3)$ se'n dedueix $x = 5$, $y = -1$ i $z = -5$. El punt buscat és $C = (5, -1, -5)$.

Solució 2

L'equació vectorial de la recta que passa pels punts A i B és

$$X = A + \lambda\overrightarrow{AB}\,, \quad \text{és a dir,} \quad X = (-1, 2, 4) + \lambda(4, 2, -6).$$

És evident que per $\lambda = 1$, tenim que $X = B$. Llavors, per $\lambda = 3/2$ obtindrem el punt C,

$$C = A + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 4) + \frac{3}{2}(4, -2, -6) = (5, -1, -5).$$

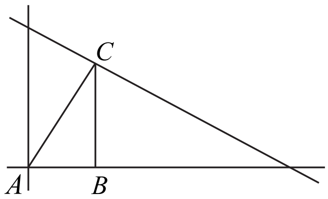
Solució 3

Podem observar que A_1 és el punt mig del segment $\overline{AB}$ i que B és el punt mig del segment $\overline{A_1C}$. Llavors,

$$A_1 = \frac{A+B}{2} = (1, 1, 1) \quad \text{i} \quad B = \frac{A_1 + C}{2} \Longrightarrow (3, 0, -2) = \frac{1}{2}(x+1, y+1, z+1).$$

La solució és $x = 5$, $y = -1$ i $z = -5$.

6.- Un triangle rectangle situat en el primer quadrant té el vèrtex A en l'origen de coordenades, el vèrtex $B = (x, 0)$ en el semieix positiu d'abscisses i el vèrtex C pertany a la recta $x + 2y = 8$. L'angle recte és el que correspon al vèrtex B.



(a) ***Comproveu que l'àrea del triangle es pot expressar com $A(x) = 2x - \dfrac{x^2}{4}$.***

(b) ***Trobeu els vèrtexs B i C perquè l'àrea del triangle sigui màxima i comproveu que es tracta realment d'un màxim.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Sigui $B = (x, 0)$. Llavors el punt C és $C = (x, f(x)) = \left(x, \dfrac{8-x}{2}\right)$. Com que el triangle és rectangle, podem agafar com a base el costat $\overline{AB}$ i com a altura el costat $\overline{BC}$ (els catets del triangle). Llavors,

$$A(x) = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{x \cdot \dfrac{8-x}{2}}{2} = \frac{8x - x^2}{4} = 2x - \frac{x^2}{4}.$$

(b) Per trobar els extrems d'aquesta funció, trobarem els punts on la seva derivada és nul·la.

$$A'(x) = 2 - \frac{x}{2}; \qquad A'(x) = 0 \iff x = 4.$$

Llavors, els vèrtexs del triangle són $B = (4, 0)$ i $C = (4, 2)$.

Comprovem ara que és un màxim. Calculem la segona derivada de la funció àrea, $A''(x) = -\dfrac{1}{2} < 0$. Com que aquest valor és negatiu, es tracta d'un màxim.

Una altra manera de decidir que és un màxim consisteix en estudiar el signe de $A'(x)$ abans del valor $x = 4$ (signe positiu) i després d'aquest valor (signe negatiu).

També es pot raonar que la funció $A(x)$ és una paràbola amb el coeficient de x^2 negatiu i que, per tant, el seu vèrtex (l'extrem relatiu) correspon a un màxim.