Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2012-2013

Matemàtiques

Sèrie 4

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Sabem que el vector (2, 1, −1) és una solució del sistema

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz &= a + c \\ bx - y + bz &= a - b - c \\ cx - by + 2z &= b \end{aligned}\right\}$$

Calculeu el valor dels paràmetres a, b i c.

[2 punts]

2. La corba $y = x^2$ i la recta $y = k$, amb $k > 0$, determinen una regió plana.

a) Calculeu el valor de l'àrea d'aquesta regió en funció del paràmetre k.

b) Trobeu el valor de k perquè l'àrea limitada sigui $\sqrt{6}\,u^2$.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

3. Sigui $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ p & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$.

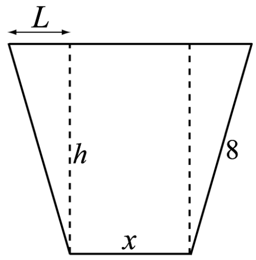
a) Què significa que la matriu $\boldsymbol{B}$ sigui la matriu inversa de $\boldsymbol{A}$?

b) Trobeu el valor del paràmetre p perquè la matriu inversa de $\boldsymbol{A}$ i la matriu transposada de $\boldsymbol{A}$ coincideixin.

NOTA: No aproximeu les arrels mitjançant valors amb decimals; treballeu amb els radicals.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 1,5 punts per l'apartat *b*]

4. Es vol construir un canal que tingui com a secció un trapezi isòsceles de manera que l'amplària superior del canal sigui el doble de l'amplària inferior i que els costats no paral·lels siguin de 8 metres. A la dreta teniu un esquema de la secció del canal.



a) Trobeu el valor del segment L de la gràfica en funció de la variable x (amplària inferior del canal).

b) Sabem que l'àrea d'un trapezi és igual a l'altura multiplicada per la semisuma de les bases. Comproveu que, en aquest cas, l'àrea de la secció és donada per

$$A(x) = \frac{3x\sqrt{256 - x^2}}{4}$$

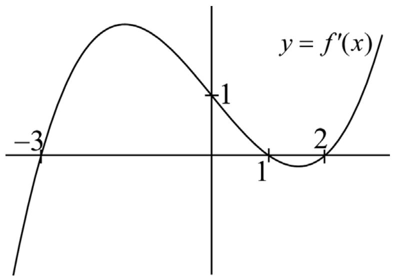
c) Calculeu el valor de x perquè l'àrea de la secció del canal sigui màxima (no cal que comproveu que és realment un màxim).

[0,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*; 1 punt per l'apartat *c*]

5. Donats els punts $P = (1,\ 0,\ -1)$ i $Q = (-1,\ 2,\ 3)$, trobeu un punt R de la recta $r: \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-3}{-1}$ que compleixi que el triangle de vèrtexs P, Q i R és isòsceles, en què $\overline{PR}$ i $\overline{QR}$ són els costats iguals del triangle.

[2 punts]

6. La funció $f(x)$ és derivable i passa per l'origen de coordenades. La gràfica de la funció derivada és la que veieu aquí dibuixada, essent $f'(x)$ creixent als intervals $(-\infty, -3]$ i $[2, +\infty)$.



a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 0$.

b) Indiqueu les abscisses dels extrems relatius de la funció $f(x)$ i classifiqueu aquests extrems.

[1 punt per cada apartat]

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2012-2013

Matemàtiques

Sèrie 3

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Sigui π: $3x - 2y + z = 10$.

a) Trobeu l'equació contínua de la recta r perpendicular a π que passa pel punt $P = (-1, 3, 2)$.

b) Trobeu també l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla π_1 paral·lel a π que passa pel mateix punt P.

[1 punt per cada apartat]

2. Considereu la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{bmatrix}$. Sigui $\boldsymbol{I}$ la matriu identitat d'ordre 2.

a) Trobeu el valor del paràmetre a perquè es compleixi que $\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$.

b) Calculeu la matriu inversa de la matriu $\boldsymbol{A}$ quan $a = -2$.

[1 punt per cada apartat]

3. Donada la funció $f(x) = \sqrt{x-1}$ i la recta horitzontal $y = k$, amb $k > 0$,

a) Feu un esbós del recinte limitat per les gràfiques de la funció i la recta, i els eixos de coordenades.

b) Trobeu el valor de k sabent que l'àrea d'aquest recinte és igual a 14/3.

[0,5 per l'apartat *a*; 1,5 per l'apartat *b*]

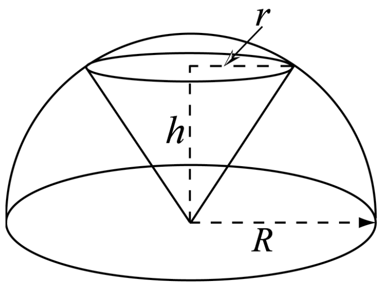
4. Un triangle d'àrea 3/2 té dos dels vèrtexs als punts $P = (0, 0, 0)$ i $Q = (2, 0, 1)$. El tercer vèrtex, R, és un punt de la recta

$$r: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

i té la primera coordenada no nul·la. Calculeu les coordenades del vèrtex R.

[2 punts]

5. En una semiesfera de radi R inscrivim un con situant el vèrtex al centre de la semiesfera, tal com es veu en el dibuix.



a) Sabent que el volum d'un con és igual a l'àrea de la base multiplicada per l'altura i dividida per 3, comproveu que, en aquest cas, podem expressar el volum com

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3}(R^2 - h^2)$$

b) Trobeu les dimensions d'aquest con (el radi de la base i l'altura) perquè el seu volum sigui màxim i comproveu que es tracta realment d'un màxim.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 1,5 punts per l'apartat *b*]

6. Sigui $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Sabem que la gràfica d'aquesta funció és tangent a la recta r: $y = x + 3$ en el punt d'abscissa $x = -1$, i que en el punt d'abscissa $x = 1$ la recta tangent és paral·lela a la recta r.
Calculeu el valor dels paràmetres a, b i c.

[2 punts]

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2012-2013

Matemàtiques

Sèrie 5

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Siguin π_1 el pla $2x + 3y - z = 4$ i π_2 el pla $x - 2y - 4z = 10$.

a) Comproveu que els plans π_1 i π_2 són perpendiculars.

b) Trobeu l'equació contínua de la recta paral·lela als plans π_1 i π_2 i que passa pel punt $P = (-1, 3, 2)$.

[1 punt per cada apartat]

2. La matriu de coeficients d'un sistema d'equacions lineals homogeni és

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 4 & 1 & 2a+2 \end{bmatrix}$$

a) Per a quins valors del paràmetre a el sistema té una sola solució? Quina és aquesta solució única?

b) Resoleu el sistema si $a = 2$.

[1 punt per cada apartat]

3. Donats els punts $P = (1, -1, 2)$, $Q = (2, 0, 1)$ i $R = (3, 2, -1)$,

a) Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla que determinen.

b) Trobeu un punt S pertanyent a la recta $r: \frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{-3}$, de manera que el tetraedre de vèrtexs P, Q, R i S tingui un volum igual a 1/2.

[1 punt per cada apartat]

4. Per a $x \geq 1$, considereu la funció $f(x) = +\sqrt{x-1}$.

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt d'abscissa igual a 10.

b) Calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de $f(x)$, la recta d'equació $x = 5$ i l'eix OX.

[1 punt per cada apartat]

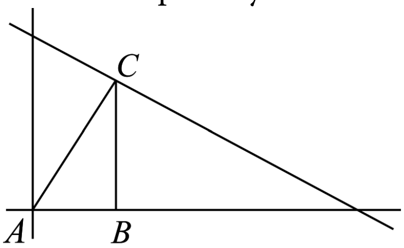
5. Considereu els punts $A = (-1, 2, 4)$ i $B = (3, 0, -2)$.

a) Trobeu l'equació del pla format per tots els punts que equidisten de A i B.

b) Donat un punt $C = (x, y, z)$, dividim el segment $\overline{AC}$ en tres parts iguals i obtenim els punts A, A_1, B i C. Trobeu el punt C.

[1 punt per cada apartat]

6. Un triangle rectangle situat en el primer quadrant té el vèrtex A en l'origen de coordenades, el vèrtex $B = (x, 0)$ en el semieix positiu d'abscisses i el vèrtex C pertany a la recta $x + 2y = 8$. L'angle recte és el que correspon al vèrtex B.



a) Comproveu que l'àrea del triangle es pot expressar de la manera següent: $A(x) = 2x - \dfrac{x^2}{4}$.

b) Trobeu els vèrtexs B i C perquè l'àrea del triangle sigui màxima i comproveu que es tracta realment d'un màxim.

[1 punt per cada apartat]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés