

SÈRIE 2

1.- Donada la matriu $M = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & k-2 & -k \end{pmatrix}$,

(a) Calculeu els valors del paràmetre k per als quals la matriu M no és invertible.

(b) Per a $k = 0$, calculeu M^{-1} .

[1 punt per apartat]

Solució

(a) Sabem que una matriu és invertible si i sol si el seu determinant és no nul. Busquem, doncs, el determinant de la matriu M ,

$$\det M = \begin{vmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & k-2 & -k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & 0 & -k-1 \end{vmatrix} = (k+1)(k-2)(-k-1) = -(k+1)^2(k-2).$$

Aquest determinant val zero quan $k = -1$ o $k = 2$; aquests són els valors per als que la matriu no és invertible.

(b) Per $k = 0$ la matriu és $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ i la seva inversa es pot calcular utilitzant el mètode de

Gauss-Jordan,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & | & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & -2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

També es pot calcular utilitzant la matriu complementària (matriu adjunta transposta).

La matriu inversa és

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.- Donada la recta $\left. \begin{matrix} 2x - y + 3z = 2 \\ x + z + 1 = 0 \end{matrix} \right\}$, calculeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla perpendicular a la recta que passa pel punt $P = (1, 0, -1)$.

[2 punts]

Solució

Perquè el pla buscat i la recta donada siguin perpendiculars, el vector normal del pla i el director de la recta han de ser paral·lels; el més senzill és agafar-los iguals. Busquem, doncs, el vector director de la recta,

$$v_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i + j + k = (-1, 1, 1).$$

L'equació del pla π amb vector normal $v_\pi = (A, B, C)$, passant pel punt $P = (x_0, y_0, z_0)$ és

En el nostre cas, ens queda

$$(-1)(x-1) + 1(y-0) + 1(z+1) = 0, \text{ és a dir, } -x + y + z + 2 = 0.$$

3.- Donada la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$:

(a) **Determineu la relació que han de complir els paràmetres a , b i c perquè $f(x)$ tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -1$.**

(b) **Calculeu el valor del paràmetre a perquè hi hagi un punt d'inflexió de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 0$.**

(c) **Determineu la relació entre els paràmetres a , b i c sabent que la gràfica de $f(x)$ talla l'eix OX en el punt d'abscissa $x = -2$.**

(d) **Calculeu el valor dels paràmetres a , b i c perquè es compleixin les tres propietats anteriors alhora.**

[0,5 punts per cada apartat]

Solució

(a) Perquè hi pugui haver un extrem relatiu de la funció en $x = -1$, cal que $f'(-1) = 0$. Com que $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, la relació buscada és $3 - 2a + b = 0$.

(b) En un punt d'inflexió la segona derivada ha de ser zero. Tenim que $f''(x) = 6x + 2a$; per tant, $f''(0) = 2a = 0$. Llavors, $a = 0$.

(c) És clar que la condició és $f(-2) = -8 + 4a - 2b + c = 0$.

(d) Cal resoldre el sistema $3 - 2a + b = 0$, $a = 0$, $-8 + 4a - 2b + c = 0$. La solució és $a = 0$, $b = -3$ i $c = 2$.

4.- Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) **Calculeu A^2 i A^3 .**

(b) **Deduïu el valor de A^{101} .**

NOTA: treballeu amb radicals; no utilitzeu la representació decimal dels elements de la matriu.

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Tenim que

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

(b) Com que $101 = 33 \cdot 3 + 2$, ens queda

$$A^{101} = A^{33 \cdot 3 + 2} = (A^3)^{33} \cdot A^2 = (I_3)^{33} \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.- Considereu la recta $r : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = z-a$ i el pla $\pi : 2x + y - 5z = 5$.

(a) Estudieu la posició relativa de la recta r i el pla π en funció del paràmetre a .

(b) Quan $a = 3$, trobeu la distància de la recta r al pla π .

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) El vector director de la recta és $v_r = (3, -1, 1)$; el punt $P = (1, -2, a)$ pertany a la recta r . Per altra banda, el vector normal del pla π és $v_\pi = (2, 1, -5)$. Comprovem si v_r i v_π són o no ortogonals,

$$v_r \cdot v_\pi = (3, -1, 1) \cdot (2, 1, -5) = 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-5) = 0.$$

Efectivament, ho són. Per tant, la recta és paral·lela al pla o la recta està continguda en el pla. Per acabar-ho de decidir, mirem si el punt P pertany o no al pla.

$$P \in \pi \iff 2 \cdot 1 + (-2) - 5a = 5 \iff a = -1.$$

En definitiva,

- Si $a = -1$, la recta està continguda al pla.
- Si $a \neq -1$, la recta i el pla són paral·lels.

(b) Per trobar la distància entre una recta i un pla paral·lels, n'hi ha prou en calcular la distància d'un punt qualsevol de la recta al pla. Així,

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 + (-2) - 5 \cdot 3 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-5)^2}} = \frac{20}{\sqrt{30}}.$$

6.- Sigui $f(a) = \int_0^{1/a} (a^2 + x^2) dx$ per $a > 0$.

(a) Comproveu que $f(a) = \frac{1}{3a^3} + a$.

(b) Calculeu el valor del paràmetre a perquè la funció $f(a)$ tingui un mínim relatiu.

[1 punt per cada apartat]

Solució

$$(a) f(a) = \int_0^{1/a} (a^2 + x^2) dx = \left[a^2 x + \frac{x^3}{3} \right]_0^{1/a} = a^2 \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{3a^3} = a + \frac{1}{3a^3}.$$

(b) Perquè la funció $f(a)$ tingui un mínim, és necessari que $f'(a) = 0$. Així,

$$f'(a) = 1 - \frac{1}{a^4} = 0 \implies a^4 = 1 \implies a = \pm 1.$$

La condició $a > 0$ fa que ens quedem solament amb $a = 1$.

La derivada segona de la funció és $f''(a) = 4/a^5$. Llavors, $f''(1) > 0$, la qual cosa indica que per a $a = 1$ hi ha un mínim.