

## SÈRIE 1

## QÜESTIONS

1.- Considereu la matriu  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -b \end{pmatrix}$ . Calculeu el valor dels paràmetres  $a$  i  $b$  perquè  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ .

[2 punts]

## Solució

Calculem el valor de la matriu  $A^2$ ,

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a-b & b^2 \end{pmatrix}.$$

Quan igualem aquest resultat a la matriu  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  ens queden les equacions  $a^2 = 1$ ,  $a - b = -2$  i  $b^2 = 1$ . La segona equació permet assegurar que  $a = b - 2$ . Llavors, la primera equació és  $(b - 2)^2 = 1$  que té per solucions  $b = 3$  i  $b = 1$ ; la tercera equació té per solucions  $b = 1$  i  $b = -1$ . El valor que les compleix simultàniament és  $b = 1$ ; d'aquí,  $a = 1 - 2 = -1$ .

També es pot treballar de la forma explicitada a continuació.

De la primera equació, resulta  $a = \pm 1$ ; igualment, de la tercera en deduïm que  $b = \pm 1$ . Ara cal comprovar aquests valors en la segona equació.

- Quan  $a = 1$  i  $b = 1$ , tenim que  $a - b = 0$ .
- Per  $a = 1$  i  $b = -1$ , surt que  $a - b = 2$ .
- Si  $a = -1$  i  $b = 1$ , ens queda que  $a - b = -2$ .
- Finalment, quan  $a = -1$  i  $b = -1$ , tenim que  $a - b = 0$ .

Així l'única solució és  $a = -1$  i  $b = 1$ .

2.- Considereu en l'espai  $\mathbb{R}^3$  les rectes  $r$  i  $s$ , les equacions respectives de les quals són:

$$r : (x, y, z) = (4, 1, 0) + \lambda(m, 1, 1), \quad s : \begin{cases} x + 2y + mz = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases},$$

en què  $m$  és un paràmetre real. Estudieu si hi ha cap valor d'aquest paràmetre per al qual les rectes siguin perpendiculars i es tallin.

[2 punts]

## Solució

Dues rectes són perpendiculars si ho són els seus vectors directors. Busquem, per tant, els vectors directors de les rectes.

És clar que com a vector director de la recta  $r$  podem agafar  $v_r = (m, 1, 1)$ .

El vector director de la recta  $s$  es pot trobar de diferents maneres; entre elles:

(a) Efectuant el producte vectorial dels vectors característics dels plans que la determinen,

$$v_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2 - m, m - 1, -1).$$

(b) Buscant un vector  $(a, b, c)$  tal que sigui perpendicular als vectors característics dels plans que la determinen,

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 2, m) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, 1, 1) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a + 2b + mc = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \implies a = (m - 2)c, b = (1 - m)c.$$

Fent  $c = 1$  (qualsevol altre valor no nul també serveix), tenim que  $v_s = (m - 2, 1 - m, 1)$ .

(c) Trobant les equacions paramètriques de la recta  $s$ . Per exemple, de la segona equació que la defineix podem deduir que  $x = 1 - y - z$ . Portant aquest valor a la primera, fent els càlculs adequats i aïllant la variable  $y$ , ens queda  $y = (1 - m)z - 1$ . Amb això,  $x = 2 - (2 - m)z$ . Les equacions paramètriques obtingudes per aquest camí són

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 - (2 - m)\lambda \\ y &= -1 + (1 - m)\lambda \\ z &= \lambda \end{aligned} \right\}.$$

El vector director (coeficients del paràmetre  $\lambda$ ) és llavors  $v_s = (m - 2, 1 - m, 1)$ .

Així, aquestes dues rectes són perpendiculars si i sol si  $(m, 1, 1) \cdot (m - 2, 1 - m, 1) = 0$ ; d'aquí,

$$(m, 1, 1) \cdot (m - 2, 1 - m, 1) = 0 \implies m^2 - 3m + 2 = 0 \implies m = 1 \text{ o } m = 2.$$

Comprovem ara si les rectes es tallen per algun d'aquests dos valors.

- Quan  $m = 1$ , les equacions paramètriques de la recta  $r$  són  $x = 4 + \lambda$ ,  $y = 1 + \lambda$ ,  $z = \lambda$ . Substituint aquests valors a les equacions que determinen la recta  $s$ , tenim  $(4 + \lambda) + 2(1 + \lambda) + \lambda = 0$  i  $(4 + \lambda) + (1 + \lambda) + \lambda = 0$ . La primera igualtat es compleix per  $\lambda = -3/2$  i la segona per  $\lambda = -4/3$ . Això vol dir que, en aquest cas, les rectes no es tallen.
- Per  $m = 2$  obtenim, seguint el mateix procediment, les equacions  $(4 + 2\lambda) + 2(1 + \lambda) + 2\lambda = 0$  i  $(4 + \lambda) + (1 + \lambda) + \lambda = 1$ , que tenen  $\lambda = -1$  com a solució comú.

Per tant, l'únic valor del paràmetre  $m$  per al qual les rectes són perpendiculars i es tallen és  $m = 2$ .

Naturalment, hi ha altres formes d'imposar la segona condició (que les rectes es tallin). Per exemple, buscant el vector  $\overrightarrow{PQ}$ , on  $P$  és un punt de la recta  $r$  i  $Q$  un punt de la recta  $s$ , i imposant que  $\text{rang}(\overrightarrow{PQ}, v_r, v_s) < 3$ . Això dona que  $m = 2$ .

De fet, és possible començar la resolució imposant la condició de què les rectes es tallin i comprovar després directament que pel valor obtingut,  $m = 2$ , les rectes són perpendiculars.

**3.- Sigui  $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$ . Donades les rectes  $r_1 : y = x + 2$  i  $r_2 : y = 7x - 2$ :**

a) **Expliqueu, raonadament, si alguna de les dues rectes donades pot ser tangent a la corba  $f(x)$  en algun punt.**

b) **En cas què alguna d'elles ho sigui, trobeu el punt de tangència.**

[1 punt per cada apartat]

Solució

a) Una recta i una corba són tangents en un punt si les dues passen pel punt i tenen el mateix pendent en ell. El pendent de la corba en un punt és el valor de la derivada de la funció en el punt. Calculem aquesta derivada:  $f'(x) = 6x^2 - 2x + 3$ .

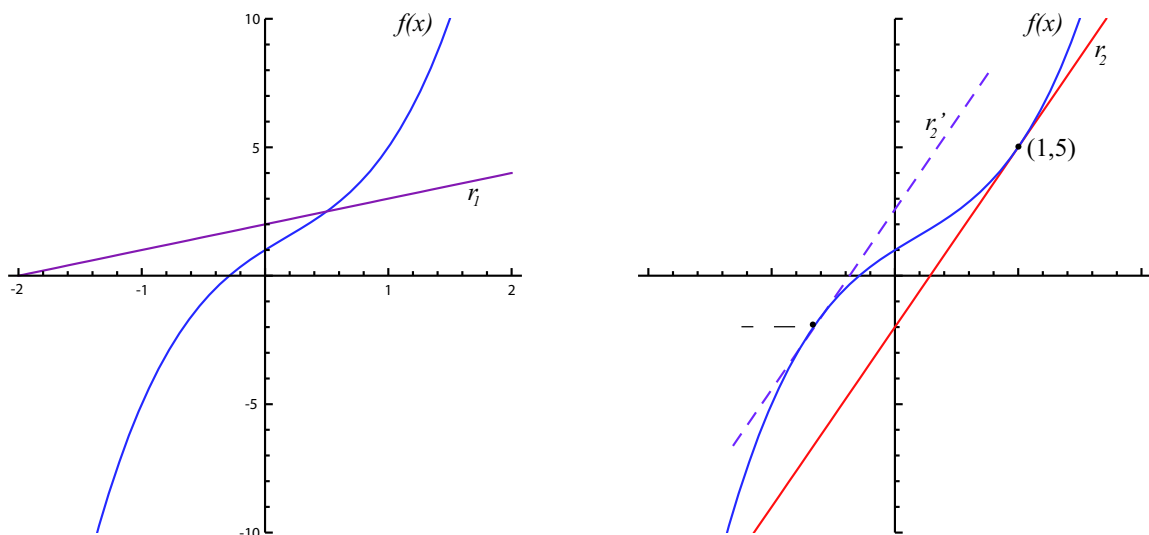
La recta  $r_1$  pot ser tangent a la corba si i sol si existeix algun valor de  $x$  per al qual  $f'(x) = 1$  (que és el valor del pendent de  $r_1$ ). Com que l'equació  $6x^2 - 2x + 3 = 1$  no té solucions (reals), la recta  $r_1$  no pot ser tangent a la gràfica de  $f(x)$ .

Paral·lelament, la recta  $r_2$  pot ser tangent a la corba si i sol si l'equació  $6x^2 - 2x + 3 = 7$  té alguna solució. Com és fàcil veure, aquesta equació admet com a solucions  $x = 1$  i  $x = -2/3$ . Per tant, la recta  $r_2$  pot ser tangent a la gràfica de  $f(x)$ .

b) Per  $x = 1$ , la funció val  $f(1) = 2 - 1 + 3 + 1 = 5$  i la recta  $r_1$ ,  $y = 7 - 2 = 5$ ; o sigui, tant la corba com la recta passen pel punt  $(1, 5)$ . Aquest és el punt de tangència.

Per  $x = -2/3$  tenim que  $f(-2/3) = -55/27$  i  $y(-2/3) = -20/3$ , la qual cosa indica que la recta i la corba, en aquest cas, no són tangents.

Les següents gràfiques il·lustren la situació de la funció i de les rectes donades.



En la de l'esquerra tenim la posició de la funció  $f(x)$  i  $r_1$ , veient-se clarament que no poden ser tangents. En la de la dreta, la recta  $r_2$  és tangent a la gràfica de  $f(x)$  en el punt  $(1, 5)$ ; la recta  $r_2'$  és paral·lela a  $r_2$  (és a dir, té el mateix pendent) passant pel punt  $(-2/3, -55/27)$ , però, evidentment, no és  $r_2$ .

**4.- Donats els vectors  $v_1 = (a + 1, 2a, 1)$ ,  $v_2 = (-2, a, 2a)$ ,  $v_3 = (a, -2, 4a - 2)$  de  $\mathbb{R}^3$ :**

a) Calculeu l'angle que formen  $v_1$  i  $v_2$  quan  $a = 0$ .

b) Trobeu el valor del paràmetre  $a$  perquè els vectors  $v_1$ ,  $v_2$  i  $v_3$  siguin perpendiculars dos a dos.

[1 punt per cada apartat]

**Solució**

a) Sigui  $\alpha$  l'angle format pels vectors  $v_1$  i  $v_2$ . Llavors,

$$\cos \alpha = \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\| \|v_2\|} = \frac{(1, 0, 1) \cdot (-2, 0, 0)}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'aquí,  $\alpha = 135^\circ = 3\pi/4$  rad.

b) Cal que es compleixi que  $v_1 \cdot v_2 = 0$ ,  $v_1 \cdot v_3 = 0$  i  $v_2 \cdot v_3 = 0$ .

$$v_1 \cdot v_2 = (a + 1, 2a, 1) \cdot (-2, a, 2a) = 2(a^2 - 1) = 0 \implies a = \pm 1$$

$$v_1 \cdot v_3 = (a + 1, 2a, 1) \cdot (a, -2, 4a - 2) = a^2 + a - 2 = 0 \implies a = 1, a = -2$$

$$v_2 \cdot v_3 = (-2, a, 2a) \cdot (a, -2, 4a - 2) = 8(a^2 - a) = 0 \implies a = 1, a = 0$$

Solament per  $a = 1$  es compleixen les tres igualtats alhora.

## PROBLEMES

5.- Considereu la funció real de variable real  $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 1}$ .

a) Trobeu-ne el domini.

b) Calculeu l'equació de les seves asymptotes, si en té.

c) Estudieu-ne els intervals de creixement i de decreixement, així com les abscisses dels seus extrems relatius, si en té, classificant-los.

[0,5 punts per l'apartat a; 1,5 punts per l'apartat b; 2 punts per l'apartat c]

### Solució

a) No són del domini solament els valors de la variable  $x$  que anul·len en denominador. Per tant,  $\text{Dom}f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ .

b) *Asímtotes verticals.* Com que

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^3}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^3}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty,$$

podem assegurar que la recta  $x = -1$  és una asímtota vertical. Paral·lelament, es comprova que  $x = 1$  també és una asímtota vertical.

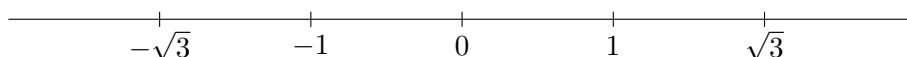
*Asímtota horitzontal.* El fet de què  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  (ja que el grau del numerador és major que el grau del denominador), ens assegura que no hi ha asímtota horitzontal.

*Asímtota obliqua.* És de la forma  $y = mx + b$  amb  $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$  i  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$ . En el nostre cas,

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^3 - x} = 2; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^3}{x^2 - 1} - 2x \right) = 0.$$

Així, tenim asímtota obliqua, d'equació  $y = 2x$ .

c) La derivada de la funció és  $f'(x) = \frac{2x^4 - 6x^2}{(x^2 - 1)^2}$ , que val zero quan  $x = 0$ ,  $x = -\sqrt{3}$  o  $x = \sqrt{3}$ . Marquem, a la recta real, els punts que anul·len la primera derivada i els que no són del domini,



Així, la recta real queda dividida en sis intervals:  $(-\infty, -\sqrt{3})$ ,  $(-\sqrt{3}, -1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, \sqrt{3})$  i  $(\sqrt{3}, +\infty)$ . Busquem el signe de la primera derivada en un punt de cada un d'aquests intervals,

$$f'(-2) > 0; \quad f'(-1,5) < 0; \quad f'(-0,5) < 0; \quad f'(0,5) < 0; \quad f'(1,5) < 0; \quad f'(2) > 0.$$

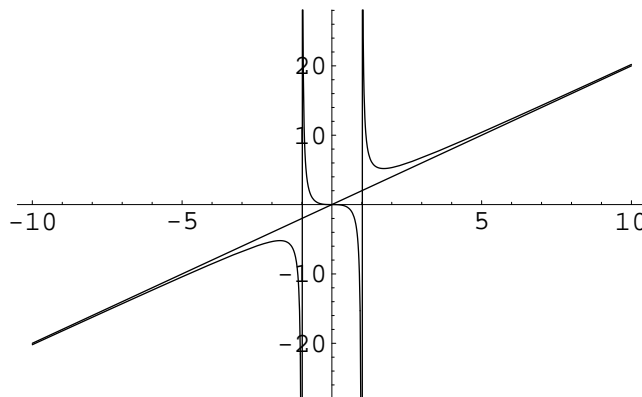
L'esquema de signes per la primera derivada és



Per tant, la funció  $f(x)$

- és creixent a  $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ ;
- és decreixent a  $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$ ;
- té un màxim quan  $x = -\sqrt{3}$ ;
- té un mínim quan  $x = \sqrt{3}$ .

Encara que en el problema no es demana, la gràfica d'aquesta funció (amb indicació de les asímptotes) és, aproximadament,



6.- Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left. \begin{aligned} x + 5y + z + a &= 0 \\ (a - 2)z + x + 2y - 1 &= 0 \\ (a - 1)y + (1 - a)x + z + a + 2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

- a) Expliqueu, raonadament, si es tracta d'un sistema lineal homogeni.
- b) Construïu-ne la matriu de coeficients i la matriu ampliada.
- c) Trobeu els valors del paràmetre  $a$  per als quals el sistema no és compatible determinat, i estudeu el caràcter del sistema en cada un d'aquests casos.
- d) Resoleu-lo solament quan el conjunt de les seves solucions és una recta de  $\mathbb{R}^3$ .

[0,5 punt per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b; 2 punts per l'apartat c; 1 punt per l'apartat d]

**Solució**

a) Un sistema d'equacions lineals és homogeni quan tots els termes independents són nuls, cosa que no passa al nostre cas; per exemple, el terme independent de la segona equació és  $-1$  (o  $1$ , si es considera translladat a la dreta de la igualtat). No és, doncs, un sistema homogeni.

b) La matriu de coeficients del sistema i la matriu ampliada són, respectivament,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & a-2 \\ 1-a & a-1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & -a \\ 1 & 2 & a-2 & 1 \\ 1-a & a-1 & 1 & -a-2 \end{pmatrix}.$$

c) Escalonem la matriu ampliada per tal de calcular el rang que té, tant ella com la matriu de coeficients,

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & -a \\ 1 & 2 & a-2 & 1 \\ 1-a & a-1 & 1 & -a-2 \end{array} \right) \stackrel{(1)}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & -a \\ 0 & -3 & a-3 & a+1 \\ 0 & 6a & 6 & a^2-2 \end{array} \right)$$

$$\stackrel{(2)}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & -a \\ 0 & -3 & a-3 & a+1 \\ 0 & 0 & 2a^2-7a+6 & a^2-4 \end{array} \right)$$

En (1) s'ha restat la fila 1 a la fila 2 ( $F_2 - F_1$ ) i la fila 1 multiplicada per  $1-a$  a la fila 3 ( $F_3 - (1-a)F_1$ ); en (2) s'ha sumat la fila 2 multiplicada per  $2a-2$  a la fila 3 ( $F_3 + (a-2)F_2$ ).

Cal analitzar quins valors del paràmetre  $a$  fan que l'element de la tercera fila tercera columna sigui nul,

$$2a^2 - 7a + 6 = 0 \implies a = 2, a = 3/2.$$

Quan  $a = 2$  o  $a = 3/2$  el sistema no és compatible determinat.

Per  $a = 2$ , la matriu resultant de l'escalonament és  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ . En aquest cas,  $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} = 2$ ; el sistema és compatible indeterminat (amb un grau de llibertat).

Per  $a = 3/2$ , la matriu resultant de l'escalonament és  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -3/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & -7/4 \end{array} \right)$ , i el sistema és incompatible, ja que  $\text{rang } A = 2 < 3 = \text{rang } \bar{A}$ .

d) El conjunt de solucions del sistema és una recta a  $\mathbb{R}^3$  si i sol si es tracta d'un sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat. Això passa per  $a = 2$ . Llavors, la solució és, per exemple,  $x = 1 - 2y$ ,  $z = -3 - 3y$ .