SÈRIE 4

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar qualsevol decimal i després arrodonir la suma total. Podeu matisar la nota de cada pregunta amb signes + i –, de manera que es compensin els matisos entre totes les preguntes.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Valoreu totes les parts de cada subapartat que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.
- Copieu la nota de la pregunta *i* en la casella *i,* a fi de poder fer estadístiques sobre cada qüestió.

QÜESTIONS

1. Sigui $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funció definida per $f(x)=e^x(ax+b)$, on a i b són nombres reals.

   a) Calculeu els valors d'a i b per tal que la funció tingui un extrem relatiu en el punt $(3,e^3)$.

   b) Per als valors d'a i b obtinguts, digueu quin tipus d'extrem té la funció en el punt esmentat.

a) Si en el punt $(3,e^3)$ hi ha un extrem relatiu, sabem dues coses: $f(3)=e^3$ i $f'(3)=0$. La derivada de la funció és $f'(x)=e^x(ax+b+a)$; llavors, ens queda

$$\begin{cases} f(3)=e^3 \\ f'(3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^3(3a+b)=e^3 \\ e^3(4a+b)=0 \end{cases}$$

Com que $e^3\neq 0$, el sistema a resoldre és

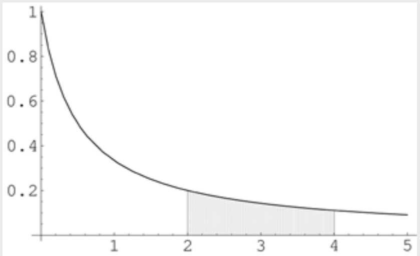
$$\begin{cases} 3a+b=1 \\ 4a+b=0 \end{cases}$$

que té com a solució $a=-1$ i $b=4$.

b) La derivada segona és $f''(x)=e^x(2-x)$. Trobem el seu signe quan s'avalua en $x=3$: $f''(3)=-e^3<0$. Per tant, en $x=3$ hi ha un màxim.

0.5 punts per dir que cal fer $f(3)=0$ i $f'(3)=0$ i calcular correctament la derivada.
0.5 punts pel plantejament i resolució del sistema
1 punt per l'apartat b)

2. El gràfic de la funció $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}$, quan $x>0$, és com segueix



a) Trobeu una primitiva de la funció *f*.

b) Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.

a) Una primitiva de la funció donada és $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln(2x+1)$.

b) L'àrea de la regió ombrejada és

$$\int_2^4 \frac{1}{2x+1}\,dx=\left[\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_2^4=\frac{1}{2}\left(\ln(9)-\ln(5)\right)=\ln\sqrt{\frac{9}{5}}\,.$$

1 punt per cada apartat.

3. Calculeu l'equació de la recta paral·lela a la recta $r:\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$ que passa pel punt (0,1,0).

Es pot encarar el problema al menys de dues formes. La primera, i més senzilla, és observar que la recta buscada ha de ser de la forma $\begin{cases} x+y-z=D_1 \\ 2x-y+z=D_2 \end{cases}$. Els valors de D_1 i D_2 es calculen imposant que la nova recta passi pel punt (0, 1, 0). Aquests valors són $D_1=1$, $D_2=-1$. Així, les equacions implícites de la recta buscada són

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y+z=-1 \end{cases}.$$

Una altra forma consisteix en calcular el vector director de la recta *r* i construir l'equació vectorial de la recta demanada. Per trobar el vector director de *r*, al qual denotarem per v_r, es poden buscar les seves equacions paramètriques,

$$x=\frac{1}{3},\;\; y=-\frac{1}{3}+\lambda,\;\; z=\lambda \;\;\Rightarrow\;\; v_r=(0,1,1)\,.$$

També podem trobar el vector perpendicular als dos plans que defineixen la recta, ja sigui utilitzant el producte escalar,

$$\begin{cases} (a,b,c)\bullet(1,1,-1)=0 \\ (a,b,c)\bullet(2,-1,1)=0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a+b-c=0 \\ 2a-b+c=0 \end{cases} \;\Rightarrow\; a=0,\; c=b \;\Rightarrow\; v_r=(0,1,1)$$

o el producte vectorial,

$$v_r\,' = (1,1,-1) \wedge (2,-1,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0,-3,-3) \quad \Rightarrow \quad v_r = (0,1,1).$$

Sigui com sigui, l'equació vectorial de la recta buscada és $(x,y,z) = (0,1,0) + t \cdot (0,1,1)$.
Si es troba el vector director de la recta r, compteu 1 punt; l'altre és per l'equació de la recta buscada. Naturalment, si algun estudiant ho fa pel primer procediment, els 2 punts són per la qüestió ben acabada.

4. Determineu els extrems d'un segment AB sabent que el punt A pertany al pla $2x + y + z = 0$, el punt B pertany a la recta $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z}{3}$ i el punt mig del segment és (0,0,0).

Sigui $A = (a_1, a_2, a_3)$ i $B = (b_1, b_2, b_3)$. Com que el punt A pertany al pla donat, sabem que $2a_1 + a_2 + a_3 = 0$. Per altra banda, el punt B ha de complir l'equació de la recta; així, $\begin{cases} b_1 + 2b_2 - 5 = 0 \\ 3b_2 + b_3 - 6 = 0 \end{cases}$. A més a més, sabem que $\dfrac{A+B}{2} = (0,0,0)$. D'aquí ens surt que $a_1 = -b_1$, $a_2 = -b_2$ i $a_3 = -b_3$. Llavors, el sistema a resoldre és $\begin{cases} 2b_1 + b_2 + b_3 = 0 \\ b_1 + 2b_2 = 5 \\ 3b_2 + b_3 = 6 \end{cases}$, que té per solució $b_1 = -\dfrac{1}{3}$, $b_2 = \dfrac{8}{3}$ i $b_3 = -2$. Els punts buscats són $A = \left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{8}{3}, 2\right)$ i $B = \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{8}{3}, -2\right)$.

Una altra forma de plantejar el problema és trobar les equacions paramètriques de la recta. Llavors ens queda que $B = (2t+1, -t+2, 3t)$. Per tant, i com que $A + B = (0,0,0)$, tenim $A = (-2t-1, t-2, -3t)$. Aquest punt ha de complir l'equació del pla donat, $2(-2t-1) + (t-2) + (-3t) = 0$. La solució d'aquesta equació ens dóna $t = -\dfrac{2}{3}$. Llavors, $B = \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{8}{3}, -2\right)$ i $A = \left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{8}{3}, 2\right)$.

És difícil donar un patró de puntuacions en aquesta qüestió. Doneu 1 punt pel plantejament i l'altre per la resolució.

PROBLEMES

5. Considereu la paràbola d'equació $y = x^2 + 2x - 3$.

   a) Calculeu les equacions de les rectes tangents a la paràbola en els punts d'abscissa $x = -1$ i $x = 1$.

   b) Calculant el mínim de la funció $y = x^2 + 2x - 3$, trobeu el vèrtex de la paràbola.

   c) Trobeu les interseccions de la paràbola amb els eixos i feu una representació gràfica de la paràbola i de les tangents obtingudes al primer apartat.

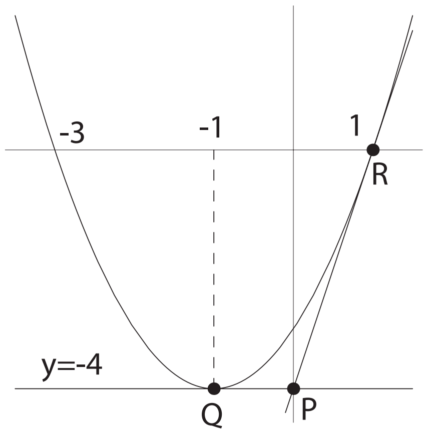
   d) Calculeu l'àrea compresa entre la paràbola i les rectes tangents.

a) Les rectes tangents buscades són de la forma $y - f(a) = f'(a)\cdot(x-a)$, essent $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Com que $f'(x) = 2x + 2$,

- per a $x = -1$, la recta tangent és $y - f(-1) = f'(-1)\cdot(x+1)$, és a dir, $y = -4$.
- per a $x = 1$, queda $y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1)$, d'on $y = 4x - 4$.

b) El mínim de la paràbola ha de complir $f'(x) = 0$. Per tant, $x = -1$. El vèrtex és $V = (-1,-4)$.

c) $x^2 + 2x - 3 = 0$ té com a solucions $x = 1$ i $x = -3$. Els punts de tall amb l'eix d'abscisses són (1, 0) i (-3, 0); quan $x = 0$, el valor de la funció és -3; per tant, el punt de tall amb l'eix d'ordenades és (0, -3). La representació gràfica demanada és



d) Cal trobar els punts de tall entre les corbes (o rectes) que limiten el recinte del qual busquem l'àrea: les dues tangents i la paràbola. Ens queda,

$$\begin{cases} y = 4x - 4 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow P = (0,-4), \quad \begin{cases} y = x^2 + 2x - 3 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow Q = (-1,-4),$$

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 3 \\ y = 4x - 4 \end{cases} \Rightarrow R = (1,0).$$

Llavors, $A = \int_{-1}^{0}[(x^2+2x-3)-(-4)]dx + \int_{0}^{1}[(x^2+2x-3)-(4x-4)]dx = \frac{2}{3}u.s.$.

Apartat a): 0.5 punts per cada tangent.
Apartat b): 0.5 punts pel càlcul de la derivada i trobar el valor $x=-1$; 0.5 punts pel càlcul del vèrtex.
Apartat c): 0.5 punts pels punts de tall; 0.5 punts per la gràfica.
Apartat d) 0.5 punts pel plantejament; 0.5 punts pel resultat final.

6. Considereu el sistema d'equacions $\begin{cases} px+7y+8z=1370 \\ x+y+z=200 \\ 7x+py+8z=1395 \end{cases}$.

a) Discutiu-lo en funció del paràmetre *p.*

b) Doneu la interpretació geomètrica en els casos en què el sistema és incompatible.

c) Resoleu el sistema per a $p=6$.

a) Esglaonant la matriu ampliada del sistema ens queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} p & 7 & 8 & 1370 \\ 1 & 1 & 1 & 200 \\ 7 & p & 8 & 1395 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 7 & p & 8 & 1395 \\ p & 7 & 8 & 1370 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & p-7 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 9-p & 1365-200p \end{array}\right).$$

Per a $p=9$ i per a $p=7$, el rang de la matriu del sistema és igual a 2 i el rang de la matriu ampliada és 3. Aquests valors fan que el sistema sigui incompatible. Per a qualsevol altre valor el sistema és compatible determinat.

Evidentment, el problema es pot començar calculant el determinant de la matriu del sistema,

$$\begin{vmatrix} p & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & p & 8 \end{vmatrix} = -p^2+16p-63,$$

que té com a arrels els valors $p=7$ i $p=9$. Per a $p=7$, la primera i la tercera equacions ens deixen veure ja que el sistema és incompatible; per a $p=9$ cal esglaonar la matriu ampliada del sistema.

b) Per a $p=7$, les equacions primera i tercera corresponen a dos plans paral·lels; és a dir, tenim dos plans paral·lels i un tercer que els talla.

Per a $p=9$, no hi ha cap pla paral·lel. Això vol dir que els plans es tallen dos a dos en rectes que són paral·leles entre sí.

c) Quan $p=6$, la solució del sistema (que pot estar resolt pel mètode de Gauss o qualsevol altre) és $x=85$, $y=60$ i $z=55$.

Apartat a): 1.5 punts (0.5 punts per cada un dels casos).
Apartat b): 1.5 punts.
Apartat c): 1 punt.