

SÈRIE 3.

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar fraccions de 0,25 punts en els diferents apartats i després arrodonir la suma total.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.

QÜESTIONS

1. En un sistema hi ha, entre d'altres, aquestes dues equacions: $x + 2y - 3z = 5$ i $2x + 4y - 6z = -2$. Què podem dir de les solucions del sistema?

SOLUCIÓ [2 punts] El rang de la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ és 1, mentre que el rang de la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 5 \\ 2 & 4 & -6 & | & -2 \end{pmatrix}$ és 2. Això ens diu que les dues equacions donades són incompatibles. Qualsevol sistema que les contingui, també serà incompatible.

2. Considereu els vectors de R^3 :

$$\vec{v}_1 = (-1, 3, 4), \vec{v}_2 = (2, -1, -3) \text{ i } \vec{v}_3 = (1, 2k+1, k+3).$$

- Trobeu l'únic valor de k per al qual aquests vectors **no** són una base de R^3 .
- Per un valor de k diferent del que heu trobat a l'apartat a), quins són els components del vector $\vec{w} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ en la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$?

SOLUCIÓ.

a) [1 punt] Tres vectors de R^3 no són base si no són linealment independents. Això passarà quan el determinant format pels tres vectors valgui 0:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2k+1 & k+3 \end{vmatrix} = 5k - 15 = 0 \Leftrightarrow k = 3.$$

Al mateix resultat s'arriba imposant que el rang de la matriu formada pels tres vectors, no sigui 3:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2k+4 & k+3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 2k+4 & k+7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2k+4 & k+7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -k+3 \end{pmatrix}$$

b) [1 punt] Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ és una base, el vector $\vec{w} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ té clarament els components $(1,1,1)$.

3. Trobeu la distància entre la recta $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{3}$ i el pla $\pi: 2x - 3y + 3z + 5 = 0$.

SOLUCIÓ [2 punts] Primer de tot estudiem la posició relativa de recta i pla. Observem que el vector director de la recta, $(2, -3, 3)$, és el vector normal del pla! Per tant, la recta és perpendicular al pla. La distància de la recta al pla és, doncs, 0.

4. Donats els punts $A = (1, 0, 0)$ i $B = (0, 0, 1)$ es demana:

- a) trobeu un punt C sobre la recta d'equació paramètrica $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ que faci que el triangle ABC sigui rectangle en C ;
- b) trobeu l'àrea del triangle ABC .

SOLUCIÓ

- a) [1 punt] El punt $C = (1, 1 + \lambda, 1 + \lambda)$. Per tal que el triangle ABC sigui rectangle en C , els vectors $\overline{CA} = (0, -1 - \lambda, -1 - \lambda)$ i $\overline{CB} = (-1, -1 - \lambda, -\lambda)$ han de ser ortogonals, és a dir

$$\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 0 \Leftrightarrow (1 + \lambda)^2 + \lambda(1 + \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1; \lambda = -\frac{1}{2}.$$

Això ens dóna dos punts solució: $C = (1, 0, 0)$ i $C = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. El primer punt, clarament és igual a A i fa que no hi hagi cap triangle. La única solució és, doncs, $C = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

b) [1 punt] Els catets del triangle seran $\overline{CA} = \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ i $\overline{CB} = \left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

L'àrea serà, doncs, $\frac{1}{2} \cdot |\overline{CA}| \cdot |\overline{CB}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ unitats d'àrea.

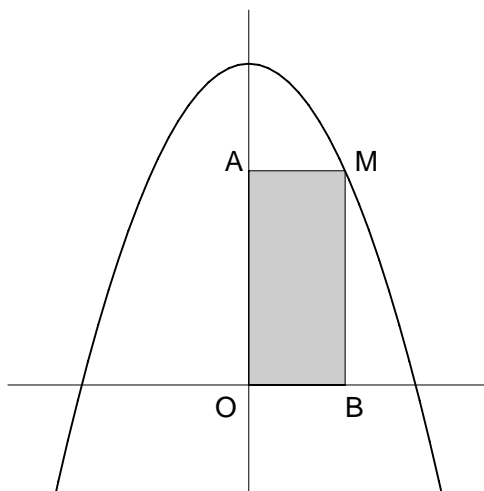
PROBLEMES

5. Considereu la funció $f(x) = 3 - x^2$ i un punt, M , de la seva gràfica situat al primer quadrant ($x \geq 0, y \geq 0$). Si pel punt M tracem paral·leles als eixos de coordenades, la seva intersecció amb OX i OY determinen dos punts, A i B respectivament. Es demana:

- feu un gràfic dels elements del problema;
- trobeu les coordenades del punt M que fa que el rectangle $OAMB$ tingui àrea màxima.

SOLUCIÓ

a) [1 punt]



b) [3 punts] Sigui $M = (a, 3 - a^2)$, amb $a \geq 0$. L'àrea del rectangle $OAMB$ és $S = a \cdot (3 - a^2) = 3a - a^3$. Per trobar-ne el mínim, resollem $S' = 0$, és a dir, $3 - 3a^2 = 0$. Tenim que $a = \pm 1$. Ens quedem només amb la solució positiva, $a = 1$. Estem en un mínim perquè $S''(1) = -6 > 0$. Així, el punt M demanat és $(1, 2)$.

Puntueu amb 1 punt el trobar correctament la funció àrea. Puntueu amb 2 punts el trobar el mínim i la comprovació de mínim. Penalitzeu amb 0,5 punts els que oblidin donar com a resposta les coordenades de M .

6. Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + b & \text{si } x < 0 \\ ae^{bx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

on a i b són nombres reals. Es demana:

- Quina condició han de complir a i b per tal que f sigui contínua a tot \mathbb{R} ?
- Trobeu els valors de a i b pels quals f sigui contínua però no derivable a tot \mathbb{R} .
- Per $a = 1$ i $b = 1$, calculeu $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

SOLUCIÓ.

- a) **[1 punt]** Tant $x^2 + x + b$ com $a \cdot e^{bx}$ són funcions contínues en tot \mathbb{R} . Per tant, l'únic punt on f pot tenir una discontinuïtat és a $x = 0$. Estudiem els límits laterals en el punt 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = b; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a.$$

Per tal que f sigui contínua a $x = 0$ cal, doncs, que $a = b$.

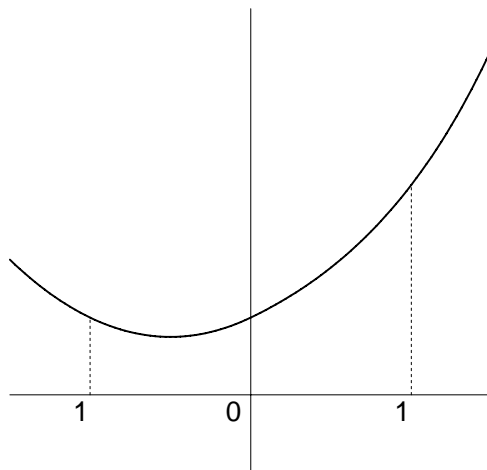
Penalitzeu amb 0,5 els que no comentin res de la continuïtat de f fora de $x = 0$.

- b) **[1 punt]** Si derivem f , obtenim:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 0 \\ abe^{bx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Per tal que f' existeixi en el punt $x = 0$, cal novament que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$. O sigui, cal que $1 = ab$. Com que la condició de continuïtat és que $a = b$, tenim que $a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$. Per tant, hi ha dues parelles de valors que farien f contínua i derivable: $a = b = 1$ o bé $a = b = -1$. Qualsevol parell de valors $a = b \neq \pm 1$ resolen la qüestió.

c) [2 punts]



$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 (x^2 + x + 1) dx + \int_0^1 e^x dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^0 + [e^x]_0^1 = \frac{5}{6} + e - 1 = e - \frac{1}{6} \text{ unitats d'àrea.} \end{aligned}$$

Puntueu 1 punt pel plantejament correcte i 0,5 punts per cada una de les dues integrals.