

A continuació trobareu l'enunciat de quatre qüestions i dos problemes. Heu de respondre només tres de les quatre qüestions i resoldre només un dels dos problemes (podeu triar les qüestions i el problema que vulgueu). En les respostes que doneu heu d'explicar sempre què és el que voleu fer i per què. Puntuació de cada qüestió: 2 punts. Total qüestions: $3 \times 2 = 6$ punts. Problema: 4 punts.

QÜESTIONS

1. Considereu la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$.
- Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 3$.
 - Existeix alguna altra recta tangent a la gràfica de $f(x)$ que sigui paral·lela a la que heu trobat? Raoneu la resposta i, en cas afirmatiu, trobeu-ne l'equació.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total 2 punts]

2. Donada la funció $f(x) = \cos x - \cos^3 x$:
- trobeu la seva integral indefinida;
 - quina és la primitiva de $f(x)$ que passa pel punt $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$?

Indicació: recordeu que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

[Puntuació: apartat a) 1,5 punts; apartat b) 0,5 punts. Total 2 punts]

3. Considereu la funció $f(x) = 1 + \frac{a}{x} + \frac{6}{x^2}$ on a és un paràmetre.
- Calculeu el valor del paràmetre a sabent que $f(x)$ té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = 3$.
 - Aquest extrem relatiu, es tracta d'un màxim o d'un mínim? Raoneu la resposta.

[Puntuació: apartat a) 1,5 punts; apartat b) 0,5 punts. Total 2 punts]

4. Considerem els punts de l'espai $A(1, 1, 0)$, $B(0, 1, 2)$ i $C(-1, 2, 1)$. Ens diuen que aquests tres punts formen part del conjunt de solucions d'un sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites. Es demana:
- aquests punts, estan alineats?
 - podem saber el rang de la matriu del sistema d'equacions?

Raoneu adequadament les respostes.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total 2 punts]

PROBLEMES

5. Donat el sistema

$$\begin{cases} y + z = 2 \\ -2x + y + z = -1 \\ (2 - 2m)x + (2m - 2)z = m - 1, \end{cases}$$

on m és un paràmetre:

- discuti el sistema segons els valors de m ;
- resoleu els casos compatibles;
- en cada un dels casos de la discussió de l'apartat a), feu una interpretació geomètrica del sistema.

[Puntuació: apartat a) 1,5 punts; apartat b) 1,5 punts; apartat c) 1 punt. Total 4 punts]

6. Tenim quatre punts a l'espai: $A(0, 0, 0)$; $B(0, 0, 2)$; $C(0, 2, 0)$ i $D(2, 0, 0)$. Es demana:

- representeu gràficament els quatre punts;
- calculeu el volum del tetràedre (piràmide de base triangular) $ABCD$;
- trobeu l'equació del pla que passa per B , C i D ;
- calculeu la distància de l'origen al pla de l'apartat anterior.

[Puntuació: apartat a) 0,5 punts; apartat b) 1,5 punts; apartat c) 1 punt; apartat d) 1 punt. Total 4 punts]

A continuació trobareu l'enunciat de quatre qüestions i dos problemes. Heu de respondre només tres de les quatre qüestions i resoldre només un dels dos problemes (podeu triar les qüestions i el problema que vulgueu). En les respostes que doneu heu d'explicar sempre què és el que voleu fer i per què. Puntuació de cada qüestió: 2 punts. Total qüestions: $3 \times 2 = 6$ punts. Problema: 4 punts.

QÜESTIONS

1. La matriu ampliada d'un sistema d'equacions lineals, un cop reduïda pel mètode de Gauss, és

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) El sistema, és compatible o incompatible? Raoneu la resposta.
b) En cas que sigui compatible resoleu-lo.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total: 2 punts]

2. Considereu els punts de l'espai $A(0, 0, 1)$, $B(1, 1, 2)$ i $C(0, -1, -1)$.

- a) Trobeu l'equació del pla ABC .
b) Si D és el punt de coordenades $(k, 0, 0)$, quant ha de valer k per tal que els quatre punts A , B , C i D siguin coplanaris?

[2 punts]

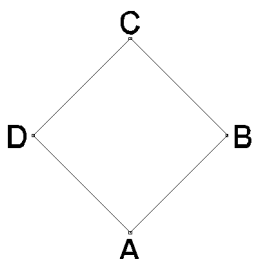
3. Considereu les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Trobeu una matriu X que compleixi $A \cdot X + A = B$.

[2 punts]

4. Els punts $A(k-3, 2, 4)$, $B(0, k+2, 2)$ i $C(-2, 6, k+1)$ són tres dels vèrtexs d'un rombe $ABCD$ (vegeu la figura).



- a) Calculeu el valor de k .
b) Demostreu que el rombe és un quadrat.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total: 2 punts]

PROBLEMES

5. Considereu la funció $f(x) = x^3 + mx^2 + 1$, $m \geq 0$.

- Calculeu el valor de m per tal que l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció, l'eix OX i les rectes $x = 0$ i $x = 2$ sigui de 10 unitats quadrades.
- Per a $m = 1$, indiqueu el punt o els punts on la recta tangent a la gràfica de la funció forma un angle de 45° amb el semieix positiu de OX .

[Puntuació: apartat a) 2 punts; apartat b) 2 punts. Total: 4 punts]

6. Donats la funció $f(x) = \sqrt{x}$ i el punt $A(2, 0)$ situat sobre l'eix de les abscisses:

- Trobeu la funció que expressa la distància del punt A a un punt qualsevol de la gràfica de la funció.
- Trobeu les coordenades del punt de la gràfica de $f(x)$ més proper a A .

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 3 punts. Total: 4 punts]