SÈRIE 1

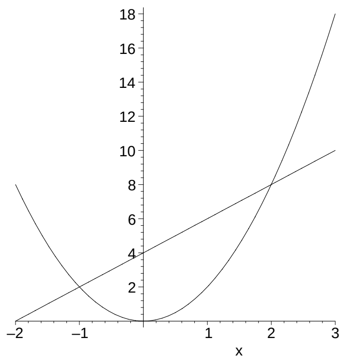
Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals (ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar altres decimals per als diferents apartats i després arrodonir la suma).

Aquestes pautes no pretenen planificar tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Hi haurà molts casos concrets, doncs, en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos en què les pautes siguin de difícil aplicació, feu prevaler sempre el vostre criteri i sentit comú.

Qüestions

1. *Calculeu el valor positiu de a que fa que l'àrea compresa entre la recta d'equació $y = a\,x + 2\,a$ i la paràbola $y = a\,x^2$ valgui 18.*

Tenint en compte que $a > 0$ l'esquema de la situació és el següent:



Les abscisses dels punts d'intersecció de la recta i la paràbola, que corresponen a les solucions de l'equació $ax^2 = ax + 2a$, són $x = 2$ i $x = -1$. Llavors l'àrea buscada és la integral

$$\int_{-1}^{2} (ax + 2a - ax^2)\,dx = \frac{9}{2}a.$$

Igualant a 18 obtindrem que $a = 4$.

Compteu un punt i mig pel plantejament correcte, incloent-hi la determinació dels punts de tall de la recta i la paràbola i la determinació de la primitiva, i deixeu el mig punt restant per a valorar la correcció dels càlculs.

---

2. *Se sap que la derivada d'una funció $f(x)$ és*

$$f'(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 1}$$

Calculeu les abscisses dels punts on la funció $f(x)$ té els seus extrems relatius, especificant per a cada un dels valors que obtingueu si es tracta d'un màxim o d'un mínim relatiu.

SÈRIE 1

Els punts on f' s'anul·la són les solucions de $x^2+x-6=0$, és a dir $x=2$ i $x=-3$. Tenint en compte que -1 no és del domini de f', f' té el signe constant en els intervals $(-\infty,-3)$, $(-3,-1)$, $(-1,2)$ i $(2,\infty)$. Aquest signe és, respectivament, $-$, $+$, $-$ i $+$. Per tant f té mínims locals en els punts d'abscissa $x=-3$ i $x=2$.

Resteu com a màxim mig punt si hi ha errors de càlcul. Valoreu sempre el coneixement que es demostri del mètode per a calcular els extrems locals.

---

3. *Comproveu que la recta que passa pels punts $A=(4,0,0)$ i $B=(0,2,2)$ és paral·lela al pla d'equació $x-3y+5z=2$, i calculeu la distància entre la recta i el pla.*

Un vector director de la recta és $\vec{AB}=(0,2,2)-(4,0,0)=(-4,2,2)$. El vector $\vec{v}=(1,-3,5)$ és perpendicular al pla. Tenim $\vec{AB}\cdot\vec{v}=0$. Per tant $\vec{AB}$ i $\vec{v}$ són perpendiculars i $\vec{AB}$ és de l'espai director del pla. La recta i el pla són llavors paral·lels. La distància entre la recta i el pla és la distància d'un punt de la recta, per exemple A, al pla que es pot calcular amb la fórmula

$$d=\frac{|4-3\times 0+5\times 0-2|}{\sqrt{1+9+25}}=\frac{2}{\sqrt{35}}$$

Compteu fins a un punt per la comprovació de que la recta i el pla són paral·lels i deixeu l'altre punt pel càlcul de la distància, restant com a màxim mig punt per errors de càlcul. Encara que no es comprovi correctament que la recta i el pla són paral·lels, valoreu el càlcul de la distància.

---

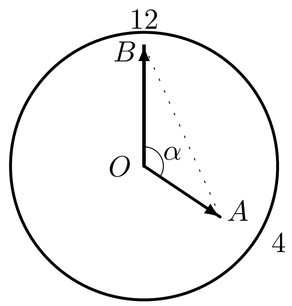
4. *Les agulles d'un rellotge de paret fan 10 i 12 centímetres respectivament.*

a) *Quina és la distància entre els seus extrems quan el rellotge assenyala les quatre?*

b) *Quina és la superfície del triangle que determinen a aquesta hora?*

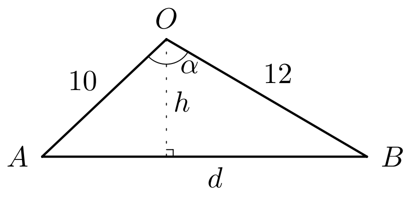
---

a) Tenim el diagrama



on $\alpha=120^{\circ}$. Si considerem el triangle OAB podem fer el diagrama

SÈRIE 1



Aplicant el teorema del cosinus

$$d^2 = 12^2 + 10^2 - 2 \times 12 \times 10 \times \cos 120^{\circ} = 364$$

d'on $d = \sqrt{364} \simeq 19,078$.

b) Aplicant el teorema del sinus al triangle OAB,

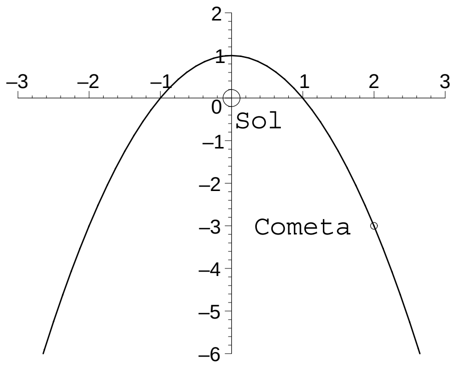
$$\sin \hat{A} = \frac{12 \times \sin \alpha}{d} = \frac{12 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{364}} \simeq 0,544$$

Aleshores $h = 10 \times \sin \hat{A} \simeq 5,44$ i l'àrea S és $S = \frac{1}{2} \times \sqrt{364} \times 10 \times \frac{6 \times \sqrt{3}}{\sqrt{364}} = 30 \times \sqrt{3} \simeq 51,96152$

Compteu un punt per cada apartat. Valoreu sempre el plantejament del problema i el coneixement que es demostri dels mètodes de resolució de triangles. Per errors de càlcul traieu com a màxim mig punt.

Problemes

1. *Suposem que el Sol es troba a l'origen d'un sistema de coordenades i que un cometa segueix una trajectòria donada per la paràbola $y = 1 - x^2$, tal i com es veu a la figura següent:*



a) *Quin és el punt en què el cometa es troba més proper al Sol?*

b) *Quant val en aquest cas la distància del Sol al cometa?*

c) *Hi ha algun punt en què el cometa es trobi a la màxima distància del Sol?*

d) *Hi ha algun punt en què la distància entre el Sol i el cometa sigui un màxim local o relatiu?*

SÈRIE 1

Nota: *Teniu present que la distància entre dos punts és màxima o mínima quan el quadrat de la distància és màxim o mínim.*

La distància al quadrat d'un punt $(x, 1-x^2)$ de la paràbola a l'origen és

$$d(x) = x^2 + (1-x^2)^2 = x^4 - x^2 + 1$$

La derivada de $d(x)$ és $d'(x) = 4x^3 - 2x$ que s'anul·la en $x = 0$, $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ i $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ de tal forma que en $x = 0$ la funció d té un màxim local i en els punts $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ mínims locals. Aleshores:

a) Els punts en que el cometa es troba més proper al Sol són $(\pm\sqrt{2}/2, 1/2)$.

b) En aquests punts la distància és $\sqrt{d(\pm\sqrt{2}/2)} = \sqrt{3}/2$.

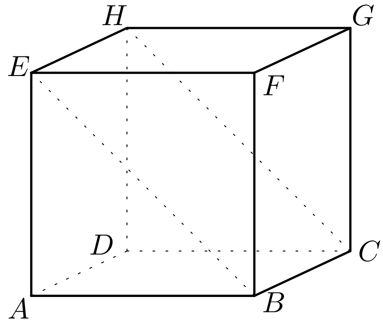
c) No hi ha cap punt concret que sigui el més allunyat del Sol ja que $\lim\limits_{x\to\infty} d(x) = \infty$.

d) Amb els càlculs anteriors es veu que en $x = 0$ la funció $d(x)$ té un màxim local.

Compteu un punt per cada apartat. En l'apartat c) mireu si es demostra que es té clar que la distància del cometa al Sol creix, independentment de la justificació rigorosa que s'en doni. En qualsevol cas valoreu el coneixement dels mètodes per a trobar extrems relatius i resteu com a màxim un punt per errors de càlcul.

---

2. *Considerem el cub de vèrtexs A, B, C, D, E, F, G, H que té l'aresta de longitud 4 dm.*



a) *Determineu l'equació del pla inclinat $EHBC$ si prenem com a origen de coordenades el vèrtex D i com a eixos de coordenades DA, DC i DH en aquest ordre, tenint en compte que el sentit positiu de cada un d'ells és el que sortint de l'origen D va cap A, C i H respectivament.*

b) *Calculeu les equacions de les diagonals CE i AG i utilitzeu-les per a calcular les coordenades del seu punt d'intersecció.*

SÈRIE 1

a) Amb l'origen a D i els eixos tal com s'han fixat, les coordenades dels punts E, H i B són $E = (4, 0, 4)$, $H = (0, 0, 4)$ i $B = (4, 4, 0)$. Amb aquestes dades tindrem $\vec{EH} = (-4, 0, 0)$ i $\vec{EB} = (0, 4, -4)$. L'equació vectorial del pla serà $(x, y, z) = (4, 0, 4) + \lambda(-4, 0, 0) + \mu(0, 4, -4)$ que correspon a $y + z = 4$.

b) Tenim els punts amb coordenades $C = (0, 4, 0)$, $E = (4, 0, 4)$, $A = (4, 0, 0)$ i $G = (0, 4, 4)$. El vector director de la diagonal CE serà $\vec{CE} = (4, -4, 4)$, mentre que el de la diagonal AG serà $\vec{AG} = (-4, 4, 4)$ i les equacions d'aquestes diagonals seran $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z}{4}$ i $\frac{x-4}{-4} = \frac{y}{4} = \frac{z}{4}$. Solucionant el sistema d'equacions corresponent, les coordenades del punt d'intersecció seran $(2, 2, 2)$.

Compteu dos punts per cada apartat. Per errors de càlcul resteu com a màxim un punt. Teniu en compte en l'apartat b) que un error en les equacions de les rectes donarà com a resultat un punt d'intersecció clarament incorrecte, per tant mireu de valorar independentment el càlcul de les equacions i la manera de determinar el punt d'intersecció.