SÈRIE 4

Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals (ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar altres decimals per als diferents apartats i després arrodonir la suma).

Aquestes pautes no pretenen planificar tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Hi haurà molts casos concrets, doncs, en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos en què les pautes siguin de difícil aplicació, feu prevaler sempre el vostre criteri i sentit comú.

Qüestions

1. *Determineu per a quins valors del paràmetre a el pla $\pi : ax+2y+z = a$ és paral·lel a la recta* $r : \begin{cases} x - ay + z = 1 \\ ax + z = a + 1 \end{cases}$

Si considerem el sistema d'equacions que té per equacions les del pla π i la recta r

$$\begin{aligned} ax + 2y + z &= a \\ x - ay + z &= 1 \\ ax + z &= a + 1 \end{aligned}$$

la recta r és paral·lela al pla π per als valors de a pels quals el sistema és incompatible. El determinant de la matriu de coeficients d'aquest sistema val $2a - 2$, que s'anul·la per a $a = 1$. Quan $a \neq 1$ el sistema és compatible determinat, mentre que quan $a = 1$ resulta el sistema incompatible. Per tant, $a = 1$ és l'únic cas per al que la recta i el pla són paral·lels.

Valoreu si es coneix la condició de paral·lelisme en termes de resolució de sistemes d'equacions lineals i el mètode utilitzat per a discutir el sistema, encara que els càlculs no siguin del tot correctes. Si els errors són purament de càlcul, traieu com a màxim mig punt.

---

2. *Siguin A, B i C els tres vèrtexs d'un triangle equilàter de costat 3 cm i P el punt del costat AB que és a 1 cm del vèrtex A. Quina és la longitud del segment CP?*

Els tres angles d'un triangle equilàter són de 60°. Aplicant el teorema del cosinus al triangle APC tenim

$$(PC)^2 = 1^2 + 3^2 - 2 \times 3 \times \cos 60^{\circ} = 7$$

d'on $PC = \sqrt{7} \sim 2,64575$.

Compteu fins a un punt i mig si la fórmula per a determinar PC és correcta i el mig punt que queda per la resta de càlculs.

SÈRIE 4

3. *Considereu la funció definida per*

$$f(x) = \begin{cases} e^{a\,x}, & si\ x \leq 0 \\ 2x+1, & si\ x > 0 \end{cases}$$

on a és un nombre real.

a) Calculeu $\lim_{x \to 0} f(x)$ i comproveu que $f(x)$ és contínua en $x = 0$.

b) Per a quin valor del paràmetre a la funció $f(x)$ és derivable en $x = 0$?

---

a) Com que $f(0) = 1$ i $\lim_{x \to 0} e^{ax} = \lim_{x \to 0}(2x+1) = 1$ (independentment del valor que tingui a), la funció $f(x)$ és contínua.

b) Com que la derivada de e^{ax} és $a\,e^{ax}$, que en $x = 0$ val a, i la derivada de $2x+1$ és costant i igual a 2, la funció $f(x)$ és derivable només quan $a = 2$.

Compteu un punt per cada apartat. Teniu en compte que pot haver alumnes que no coneguin el llenguatge de límit per la dreta i límit per l'esquerra i que, per tant, no es pot esperar que la qüestió es resolgui utilitzant aquest llenguatge. El que si han de saber tractar és el que passa quan es defineix una funció *enganxant-ne* dues.

---

4. *Sabeu que la gràfica de la funció $f(x)$ passa pel punt $(1, -4)$ i que la seva funció derivada és $f'(x) = 2x - 2$.*

a) Determineu l'expressió de $f(x)$.

b) Calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de $f(x)$ i l'eix d'abscises OX.

---

a) Les primitives de $2x - 2$ són de la forma $g(x) = x^2 - 2x + k$, on k és una constant. Si la gràfica ha de passar per $(1, -4)$ és que $g(1) = -4$ i, per tant, $k = -3$. D'aquí que resulti $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

b) Els punts de tall de la gràfica de $f(x)$ amb l'eix d'abscisses corresponen a $x = -1$ i $x = 3$. L'àrea que es demana serà

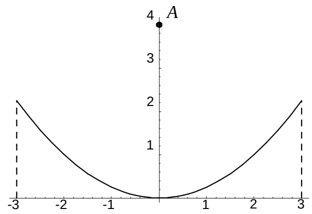
$$-\int_{-1}^{3} (x^2 - 2x - 3)\,dx = \frac{32}{3}$$

Compteu 1 punt per cada apartat. Valoreu sobretot si demostren conèixer el concepte de primitiva i el mètode per a calcular àrees. Puntueu independentment cada un dels dos apartats i traieu com a màxim mig punt del total de 2 per errors de càlcul.

SÈRIE 4

Problemes

1. *La riba d'un tram de riu descriu la corba* $y = \dfrac{1}{4}x^2$, *per a* x *entre* -3 *i* 3, *i en el punt* $A = (0, 4)$ *hi ha un poble, tal com es pot veure en l'esquema següent:*



a) *Expresseu la distància des d'un punt qualsevol d'aquesta vora del riu fins al poble, en funció de l'abscissa* x.

b) *Quin és el punt de la vora d'aquest tram de riu que és més lluny del poble?*

c) *Hi ha algun punt de la vora del riu a una distància del poble inferior a 2?*

---

a) La distància del punt A a un punt de la gràfica, de la forma $(x, x^2/4)$, és

$$f(x) = \sqrt{x^2 + (4 - \frac{1}{4}x^2)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}x^4 - x^2 + 16}$$

b) La derivada de $f(x)$ és

$$f'(x) = \frac{1}{8\sqrt{x^2 + (4 - \frac{1}{4}x^2)^2}}\dot{x}(x^2 - 8)$$

que s'anul·la per a $x = -2\sqrt{2}$, $x = 0$ i $x = +2\sqrt{2}$ (tots aquests valors de x estan entre -3 i 3). De fet, hi ha mínim locals de $f(x)$ en $x = \pm 2\sqrt{2}$ i un màxim local en $x = 0$.
El valor de $f(x)$ en els punts $x = \pm 2\sqrt{2}$ és aproximadament $3,4641$, en $x = 0$ és 4 i en els extrems del tram que es considera ($x = \pm 3$) val aproximadament $3,4731$. Per tant, la distància màxima és per l'origen de coordenades.

c) Tal i com s'ha calculat en l'apartat anterior, la distància mínima d'un punt de la vora del riu al poble és aproximadament $3,46$. Per tant, no hi pot haver cap punt a una distància que sigui igual a 2.

Compteu un punt per la correcta expressió de la distància $f(x)$ en funció de x (apartat a)), 2 punts per la determinació dels extrems locals de $f(x)$ i la determinació del punt on hi ha la distància màxima (apartat b)) i l'altre punt per l'apartat c). Procureu puntuar els tres apartats per separat i no traieu més de un punt del total de 4 per errors de càlcul. Respecte els possibles errors de càlcul, cal tenir en compte, sobretot, la petita diferència que hi ha entre el valor de la distància en els punts de mínim local i el valor que té en els extrems (-3 i 3) ja que eventualment

SÈRIE 4

(segons com s'arrodoneixin els càlculs) pot no estar clar on hi ha el valor mínim absolut. En tot cas, fixeu-vos que aquest valor mínim sempre hauria de sortir més gran que 2.

---

2. *Sigui* π *el pla d'equació* $x - y + 2z = 3$ *i* P *el punt* $(1, 1, 0)$.

a) *Calculeu la distància* d *de* P *a* π.

b) *Determineu l'equació de l'altre pla* π' *paral·lel a* π *que també dista* d *del punt* P.

c) *Determineu l'equació de la recta* r *perpendicular a* π *que passa per* P.

d) *Calculeu la intersecció de la recta* r *amb el pla* π.

---

a) Si apliquem la fórmula de la distància d'un punt a un pla tenim

$$d = \frac{|1 \times 1 - 1 \times 1 + 2 \times 0 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

b) El pla π' tindrà una equació de la forma $x - y + 2z + k = 0$. Aplicant un altre cop la fórmula de la distància d'un punt a un pla volem

$$\frac{|1 - 1 + 2 \times 0 + k|}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

Per tant $|k| = 3$, com que el pla π és el que té $k = -3$, el pla π' tindrà per equació $x - y + 2z + 3 = 0$.

c) El vector director d'una recta perpendicular a π és $(1, -1, 2)$. Les equacions de r seran

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$$

d) La intersecció de r i π s'obté solucionant el sistema d'equacions

$$\left.\begin{aligned} x - 1 &= -y + 1 \\ x - 1 &= \frac{1}{2}z \\ x - y + 2z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

La solució d'aquest sistema és $x = 3/2$, $y = 1/2$ i $z = 1$. És a dir, el punt d'intersecció és $(3/2, 1/2, 1)$.

Compteu un punt per cada apartat, puntuant cada un d'ells independentment dels altres i no traieu més de 1 punt del total de 4 per errors de càlcul.
