Sèrie 1

Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals (ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar altres decimals per als diferents apartats i arrodonir després la suma). Aquestes pautes no pretenen planificar tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Hi haurà molts casos concrets, doncs, en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos en què les pautes siguin de difícil aplicació, feu valdre sempre el vostre criteri i sentit comú.

Qüestions

1. Es compleix $f'(x) = 3ax^2+4x$. Els pendents de les tangents en els punts d'abscisses ± 1 són $m_1 = f'(1) = 3a + 4$ i $m_2 = f'(-1) = 3a - 4$.

   La condició de perpendicularitat és $m_1 \cdot m_2 = -1$, que equival a $a = \pm\sqrt{5/3}$. Aquestes són les solucions.

   Compteu un punt per la determinació dels pendents de les rectes tangents i un altre punt per plantejar i resoldre la condició de perpendicularitat.

2. La intersecció de les gràfiques s'obté solucionant $-x^2 + 7 = 6/x$ que és equivalent a $0 = x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6)$. Les solucions d'aquesta equació són $x = -3$, $x = 1$ i $x = 2$. L'àrea que es demana és la integral

$$\int_1^2 (7 - x^2 - \frac{6}{x})\, dx = 7x - \frac{x^3}{3} - 6\ln x \Big]_1^2 = \frac{14}{3} - 6\ln 2$$

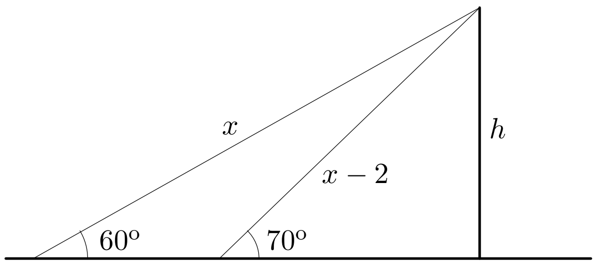
   Compteu un punt per la determinació dels punts de tall de les gràfiques i l'altre pel càlcul de la integral.

3. (a) Basta afegir una equació incompatible amb qualsevol de les dues donades. Per exemple $3x - 2y + z = 0$.

   (b) Afegim una equació combinació lineal de les dues de l'enunciat. Per exemple, restant-les, $x + y = 1$.

   Compteu un punt per cada apartat.

4. Siguin h l'alçària del pal i x la llargada de cada un dels cables. Tindrem el següent diagrama:



S'obtenen les condicions $h/(x-2) = \sin 70^{\circ}$, $h/x = \sin 60^{\circ}$. Dividint,

$$\frac{x-2}{x} = \frac{\sin 60^{\circ}}{\sin 70^{\circ}} (\simeq 0.9216).$$

Per tant $x \simeq 25.5118$. La solució és $6x \simeq 153.0708$ m.

Compteu un punt i mig pel planteig de les equacions (hi pot haver altres camins correctes per arribar a la solució) i deixeu el mig punt que queda pels càlculs explícits.

Problemes

1. (a) Considerant triangles semblants s'obté, per exemple,

$$\frac{x}{60} = \frac{45-y}{45} \quad (\text{o } \frac{y}{60-x} = \frac{45-y}{x}),$$

que equivalen a $y = 45 - (3/4)x$.

(b) El valor de l'àrea edificable xy és $V_1(x) = 25.000x(45-(3/4)x) = 25.000(45x-(3/4)x^2)$. El valor de l'àrea no edificable $60 \times 45/2 - xy = 1.350 - xy$ és $V_2(x) = 5.000(1.350 - 45x + (3/4)x^2)$. El valor total és la suma:

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x) = 6_1750.000 + 900.000\,x - 15.000\,x^2.$$

(c) $V'(x) = 900.000 - 30.000\,x$. $V'(x) = 0$ si i només si $x = 30$, punt on V té un màxim, doncs és creixent ($V' > 0$) si $x < 30$ i decreixent si $x > 30$. Les dimensions per a aquest valor màxim són $x = 30$ m i $y = 45 - 22,5 = 22,5$ m.

(d) El valor màxim és, en pessetes,

$$V(30) = 20_1250.000.$$

Compteu un punt pels dos primers apartats, un punt i mig pel tercer (quan es fa el càlcul de la derivada i es determina el punt crític) i mig per l'últim (en el que només s'ha de calcular el valor de la funció en el punt crític que s'ha trobat).

2. (a) $\vec{n} = (1,2,3)$ és vector perpendicular al pla π i serà director de la recta perpendicular a π que, en passar per $P = (2,1,1)$, té les equacions

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

(b) Un vector director de r (d'equacions paramètriques $x = 2z-3$, $y = z+4$, $z = z$) és $\vec{v} = (2,1,1)$, i serà perpendicular al pla, que tindrà una equació general del tipus $2x+y+z = d$. En passar per $P = (2,1,1)$, necessàriament $d = 6$ i l'equació d'aquest pla és $2x+y+z = 6$.

(c) Determinem un punt Q de r (per tant, $Q = (2z-3, z+4, z)$) tal que el vector $PQ = (2z-5, z+3, z-1)$ sigui ortogonal al vector director de r, $\vec{v} = (2,1,1)$. La condició d'ortogonalitat entre PQ i $\vec{v}$ és

$$4z - 10 + z + 3 + z - 1 = 0,$$

que dóna $z = 4/3$ i $PQ = (-7/3, 13/3, 1/3)$.
La recta buscada passa per $P = (2,1,1)$ i té el vector director PQ. Unes equacions per a ella són

$$\frac{x-2}{-7} = \frac{y-1}{13} = \frac{z-1}{1}.$$

(d) Un vector director $\vec{w} = (a,b,c)$ ha de ser ortogonal a $(1,2,3)$ i a $(2,1,1)$. Es pot trobar com a una de les solucions no nul·les de $(a,b,c)\cdot(1,2,3) = 0$ i $(a,b,c)\cdot(2,1,1) = 0$, i també com a producte vectorial

$$\vec{w} = (1,2,3)\times(2,1,1) = (-1,5,-3).$$

La recta passa per $(2,1,1)$ i per tant admet les equacions

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-1}{-3}.$$

Compteu un punt per cada apartat.