SÈRIE 1

RECORDEU:
- Podeu valorar amb tants decimals com considereu convenient, tanmateix aconsellem no fer-ho en més de dos decimals.
- Cal arrodonir a un decimal la nota final de l'examen, no les notes parcials.
- Cal traslladar la puntuació de cada pregunta a la casella **amb el número corresponent** de la primera pàgina de l'examen.

---

1. D'una funció $y = f(x)$ sabem que la seva derivada és $f'(x) = x^3 - 4x$.
   a. Determineu els intervals de creixement i de decreixement de la funció $y = f(x)$. *[1 punt]*
   b. Determineu les abscisses dels seus extrems relatius i classifiqueu-los. *[1 punt]*

Observem que $f'(x) = x^3 - 4x = x \cdot (x-2) \cdot (x+2)$. Per tant, si igualem la derivada a zero, obtenim tres solucions $x = 0$, $x = -2$ i $x = 2$.

a) Resolem: $f'(x) > 0$, d'on s'obté que la funció creix si x pertany als intervals $(-2,0)$ i $(2,+\infty)$ i $f'(x) < 0$, d'on obtenim que la funció decreix en els intervals $(-\infty,-2)$ i $(0,2)$.

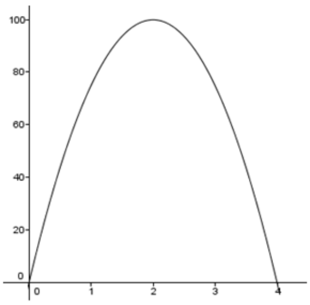
b) La funció té un màxim relatiu en el punt d'abscissa $x = 0$ i dos mínims relatius en els punts d'abscissa $x = 2$ i $x = -2$. Sabem de quin tipus d'extrems relatius es tracta pels intervals de creixement i de decreixement de l'apartat anterior.

Criteris de correcció: a) Determinació dels punts que anul·len la derivada: 0,5 p. Determinació dels intervals de creixement i decreixement: 0,5 p. b) Determinació dels extrems relatius: 0,5 p. Classificació i justificació de si són màxims o mínims: 0,5 p.

---

2. Des d'una barca es dispara una bengala de salvament marítim que s'apaga al cap de 4 minuts. En aquest interval de temps, es comprova que la intensitat lumínica de la bengala en funció del temps, mesurada en percentatges del 0% al 100%, queda perfectament descrita per l'expressió $L(t) = 25 \cdot t \cdot (4-t)$, on el temps t varia entre 0 i 4 minuts.
   a. Calculeu per a quin valor de t el percentatge d'intensitat lumínica serà màxim. *[1 punt]*
   b. Si des de la costa la bengala només és visible quan la intensitat lumínica és superior al 75%, quin és l'interval de temps en què serà visible des de la costa i, per tant, serà més factible el salvament? *[1 punt]*

a) El percentatge d'intensitat lumínica ve donat per la funció $L(t) = 25t(4-t)$, amb $0 \le t \le 4$, que és una funció quadràtica que té per gràfica una paràbola:

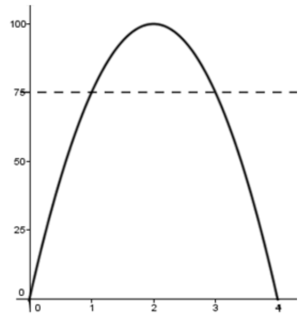


Cal, doncs, calcular el màxim d'aquesta funció; ho podrem fer calculant el vèrtex de la paràbola, o bé per derivació:

$$L'(t) = 100 - 50t = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ minuts.}$$

Com que $L'(1) > 0$ i $L'(3) < 0$ es tracta efectivament d'un màxim. Per tant, després de 2 minuts del llançament, la intensitat serà màxima.

b) Hem de resoldre la inequació $100t - 25t^2 > 75$.



Resolem l'equació de segon grau associada:

$$-25t^2 + 100t - 75 = 0 \rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$, que són els punts de tall de la paràbola amb la recta $y = 75$.

Per tant, per a t tal que $1 < t < 3$ la intensitat lumínica de la bengala superarà el 75% i aquest serà l'interval de temps en què el salvament serà més factible.

Criteris de correcció: a) Plantejament del problema: 0,25 p. Càlcul de la derivada: 0,25 p. Obtenció del màxim: 0,25 p. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 p.
b) Plantejament de la inequació: 0,25 p. Determinació de l'interval: 0,75 p.

---

3. Considereu les matrius $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \mathrm{m} & \mathrm{n} \end{pmatrix}$, on m i n són dos nombres reals.

a) Comproveu que es compleix la igualtat $(\mathrm{A}-\mathrm{B}) \cdot (\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2$. *[1 punt]*

b) Determineu m i n per tal que les matrius B i C commutin, és a dir, $\mathrm{B} \cdot \mathrm{C} = \mathrm{C} \cdot \mathrm{B}$. *[1 punt]*

a) Tenim $\mathrm{A}-\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ i $\mathrm{A}+\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$, per tant

$$(\mathrm{A}-\mathrm{B}) \cdot (\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 10 \\ 10 & 25 \end{pmatrix}$$

D'altra banda $A^2 = \begin{pmatrix} 26 & 10 \\ 10 & 26 \end{pmatrix}$ i $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'on es dedueix que es verifica la igualtat demanada.
Alternativament, podem desenvolupar $(A - B) \cdot (A + B)$ i argumentar que per comprovar que es compleix la igualtat n'hi ha prou de veure que A i B commuten:
$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$,
$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

b) Calculem els dos productes:

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ n & m \end{pmatrix}$$

Per tant commuten si i només si $m = -1$ i $n = 1$.

Criteris de correcció: a) Càlcul de $A - B$: 0,25 p. Càlcul de $A + B$: 0,25 p. Càlcul de A^2: 0,25 p. Càlcul de B^2: 0,25 p. b) Càlcul de $B \cdot C$: 0,25 p. Càlcul de $C \cdot B$: 0,25p. Determinació dels valors m i n : 0,5 p.
(Si s'ha resolt a) utilitzant que A i B commuten: 0.5 p. per justificar-ho i 0.5 p. per comprovar-ho).

---

4. Tenim unes quantes monedes d'un euro distribuïdes en tres piles. Passem dotze monedes de la tercera pila a la segona i, a continuació, en passem deu de la segona a la primera. Un cop fet això, les tres piles tenen la mateixa quantitat de monedes.
   a) Amb aquestes dades, podem determinar la quantitat de monedes que hi havia inicialment en cada pila? Raoneu la resposta. *[1 punt]*
   b) Esbrineu la quantitat de monedes que hi havia inicialment a cada pila si sabem que en total hi ha 51 monedes. [1 punt]

Anomenem x la quantitat de monedes que hi havia inicialment en la primera pila, y la quantitat de monedes que hi havia inicialment en la segona pila i, finalment, z la quantitat de monedes que hi havia inicialment en la tercera pila.
Un cop fet el traspàs de monedes descrit en l'enunciat, el contingut de cada pila és:
Primera pila: $x + 10$ monedes.
Segona pila: $y + 2$ monedes.
Tercera pila: $z - 12$ monedes.

a) Sabem que la quantitat de monedes de cada pila és la mateixa, per tant:

$$\begin{cases} x + 10 = y + 2 \\ x + 10 = z - 12 \end{cases}$$

Ordenant el sistema tenim:

$$\begin{cases} x - y = -8 \\ x - z = -22 \end{cases}$$

I resolent-lo pel mètode de Gauss tenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -1 & -22 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & -14 \end{array}\right)$$

Es tracta, per tant, d'un sistema compatible indeterminat. La solució ve expressada en funció d'un paràmetre. Prenent z com a paràmetre i aïllant adequadament, la solució és:

$$\begin{cases} x = z - 22 \\ y = z - 14 \\ z \end{cases}$$

Per tant, no podem determinar la quantitat de monedes que hi havia inicialment.

b) Si a més sabem que en total hi ha 51 monedes, aleshores tenim una equació més:

$$\begin{cases} x - y = -8 \\ x - z = -22 \\ x + y + z = 51 \end{cases}$$

Resolent per Gauss tenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -1 & -22 \\ 1 & 1 & 1 & 51 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & -14 \\ 0 & 2 & 1 & 59 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & 87 \end{array}\right)$$

De la tercera equació, $3z = 87$, és a dir, $z = 29$.
De la segona equació, $y - z = -14$, és a dir, $y = 15$.
De la primera equació, $x - y = -8$, és a dir, $x = 7$.
Per tant, inicialment en la primera pila hi havia 7 monedes, en la segona pila hi havia 15 monedes i en la tercera pila hi havia 29 monedes.

Alternativament, com que les tres piles tenen la mateixa quantitat de monedes, a cada una n'hi haurà 17 i poden obtenir la solució resolent

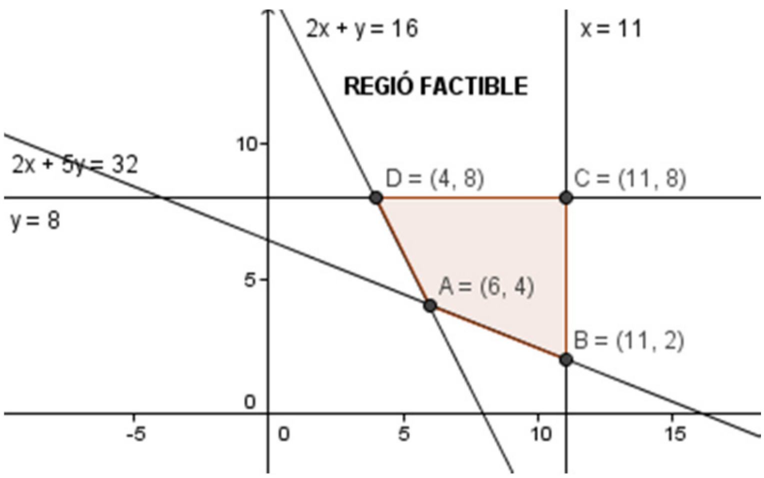
$$\begin{cases} x + 10 = 17 \\ y + 2 = 17 \\ z - 12 = 17 \end{cases}$$

Criteris de correcció: a) Plantejament del sistema: 0,5 p. Justificació que es tracta d'un sistema compatible indeterminat: 0,5 p. b) Plantejament del sistema: 0,25 p. Resolució del sistema: 0,75 p. (En cas que hagin resolt l'apartat b) utilitzant el plantejament alternatiu 0.5 p. pel plantejament i 0.5 p. per la resolució.)

5. Una companyia aèria vol organitzar per aquest estiu un pont aeri entre l'aeroport de Barcelona - el Prat i el de Palma de Mallorca, amb places suficients de passatge i càrrega, per a transportar com a mínim 1.600 persones i 96 tones d'equipatge i mercaderies. Per a fer-ho, té a la seva disposició 11 avions del tipus A, que poden transportar 200 persones i 6 tones d'equipatge i mercaderies cadascun, i 8 avions del tipus B que poden transportar 100 persones i 15 tones cadascun. Si la contractació d'un avió del tipus A costa 4.000 euros i la d'un avió del tipus B en costa 1.000,
   a. Determineu la funció objectiu, les restriccions i dibuixeu la regió de les possibles opcions que té la companyia. *[1 punt]*
   b. Calculeu el nombre d'avions de cada tipus que cal contractar perquè el cost sigui el mínim i determineu quin és aquest cost mínim. *[1 punt]*

a) Taula de dades:

Avions	x= tipus A	y= tipus B	Mínims
Persones	200	100	1600
Tones d'equipatge i mercaderies	6	15	96
Disponibles	11	8	
Preu (euros)	4000	1000	



La funció objectiu ve donada per $\text{Cost}(x, y) = 4000x + 1000y$ i les restriccions venen donades per les inequacions:

$$2x + y \geq 16$$
$$2x + 5y \geq 32$$
$$x \leq 11$$
$$y \leq 8$$

b) Veiem on s'assoleix el cost mínim:

$\text{Cost}(A) = 4000 \cdot 6 + 1000 \cdot 4 = 28000$ €

$\text{Cost}(B) = 4000 \cdot 11 + 1000 \cdot 2 = 46000$ €

$\text{Cost}(C) = 4000 \cdot 11 + 1000 \cdot 8 = 52000$ €

$$\text{Cost(D)} = 4000 \cdot 4 + 1000 \cdot 8 = 24000 \text{ €}$$

Així doncs, cal contractar 4 avions del tipus A i 8 del tipus B per obtenir un cost mínim de 24.000 euros.

Criteris de correcció: a) Determinació de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de les restriccions: 0,25 p. Determinació de la funció objectiu: 0,25 p. b)Determinació dels vèrtexs: 0,5 p. Determinació del mínim: 0,5 p.

---

6. Considereu la funció $f(x) = -x^2 + bx + c$ amb b i c nombres reals.
   a. Trobeu b i c de manera que la gràfica de la funció passi pel punt $(-1,0)$ i tingui un extrem local en el punt d'abscissa $x = 3$. Raoneu de quin tipus d'extrem relatiu es tracta. *[1 punt]*
   b. Per al cas $b = 3$ i $c = 2$, trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica que és paral·lela a la recta $y = 5x - 2$. *[1 punt]*

a) Calculem la primera derivada $f'(x) = -2x + b$ i plantegem el sistema d'equacions que permet calcular a i b, imposant que passi pel punt $(-1,0)$ i que la derivada en $x = 3$ s'anul·la.

$$\left.\begin{array}{l} -1 - b + c = 0 \\ -2 \cdot 3 + b = 0 \end{array}\right\} \text{i per tant, } b = 6 \text{ i } c = 7.$$

Si estudiem on és positiva i on és negativa la funció $f'(x)$, observem que $f'(x) > 0$ per a $x < 3$ i que $f'(x) < 0$ per a $x > 3$. Per tant es tracta d'un màxim. Alternativament poden argumentar que es tracta d'un màxim geomètricament, tenint en compte que es tracta d'una paràbola amb el coeficient del terme quadràtic negatiu.

b) En aquest cas la derivada és $f'(x) = -2x + b = -2x + 3$. Cal trobar el valor de x tal que $f'(x) = 5$, per tant $-2x + 3 = 5$, i obtenim $x = -1$. Per al punt d'abscissa $x = -1$ tenim que l'ordenada és $y = -1 - 3 + 2 = -2$. Per tant, l'equació de la recta tangent és $y + 2 = 5(x + 1)$, és a dir, $y = 5x + 3$.

Criteris de correcció: a) Plantejament del sistema: 0,5 p. Resolució: 0,25 p. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 p. b) Determinació del pendent de la recta: 0,25 p. Obtenció del punt de tangència: 0,25 p. Obtenció de la recta tangent: 0,5 p.
