

SÈRIE 5

1. Una persona decideix invertir un total de 60000 € repartits en tres entitats d'estalvi diferents: A, B i C. Aquesta persona decideix que la quantitat invertida a l'entitat A sigui la meitat de la quantitat total invertida a les entitats B i C. A més, sabem que l'entitat A li ha assegurat una rendibilitat del 5%, l'entitat B una rendibilitat del 10% i l'entitat C una rendibilitat del 2%. Calculeu les quantitats invertides a cada entitat d'estalvi si sabem que aquest inversor obtindrà uns beneficis totals de 4200 €. [2 punts]

Si anomenem x , y , z les quantitats invertides respectivament en les entitats A, B i C, les dades de l'enunciat es tradueixen en

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 60000 \\ x = \frac{y+z}{2} \\ 0,05x + 0,1y + 0,02z = 4200 \end{array} \right\} \text{ o bé } \left. \begin{array}{l} x + y + z = 60000 \\ 2x - y - z = 0 \\ 5x + 10y + 2z = 420000 \end{array} \right\}$$

que, en resoldre'l per qualsevol mètode, ens dóna $x = 20000$, $y = 30000$, $z = 10000$. Ha invertit 20000 € a l'entitat A, 30000 € a la B i 10000 € a la C.

2. Un hotel cobra 45 € per habitació i nit. Per aquest preu té ocupades 165 habitacions cada nit. S'ha fet un estudi a partir del qual s'ha deduït que, per cada euro que s'apugi el preu de l'habitació, se n'ocuparà una menys cada nit.
- a. Si x és la quantitat que s'apuja el preu de l'habitació per sobre dels 45 € inicials, determineu la funció que ens dóna els ingressos diaris de l'hotel en funció de x . Indiqueu també quins seran els ingressos màxims que pot obtenir l'hotel. [1 punt]

La funció que ens dóna els ingressos serà $l(x) = (165 - x)(45 + x) = -x^2 + 120x + 7425$.

Per a calcular els ingressos màxims calculem la derivada: $l'(x) = -2x + 120$. Aquesta derivada val 0 quan $x = 60$, que serà màxim perquè $l(x)$ és una paràbola amb coeficient principal negatiu. $l(60) = 11025$, que serà la quantitat màxima que es pot ingressar.

- b. Indiqueu entre quins preus obtindrà ingressos l'hotel. [1 punt]

$l(x) > 0$ si $-45 < x < 165$. Per tant el preu de l'habitació, que és $x + 45$, haurà d'estar entre 0 € i 210 €.

3. Determineu els valors de a , b i c que fan que la funció

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

passi pel punt (0,4) i tingui extrems relatius en els punts d'abscissa $x = 1$ i $x = 3$.

Classifiquem aquests extrems. [2 punts]

$f(0) = 4$. Per tant, $c = 4$. $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. De les condicions $f'(1) = 0$ i $f'(3) = 0$ es dedueixen els valors de a i de b : $a = -6$, $b = 9$.

A més, per a aquests valors tenim que $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$. Com que abans de $x = 1$ la derivada és positiva i després és negativa, aquest valor correspon a un màxim. Amb el mateix raonament, $x = 3$ correspon a un mínim.

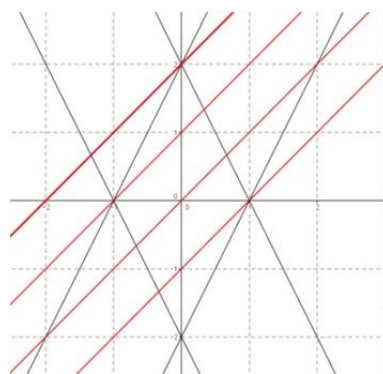
4. S'ha observat que el nombre d'entrades que es venen per al cinema d'un poble està lligat al sou mitjà x de la població, expressat en milers d'euros, segons la funció

$$N(x) = \frac{50x}{x^2 + 1}.$$

- a. Determineu el sou mitjà de la població que correspon a la màxima venda d'entrades, i justifiqueu la resposta. [1 punt]

$$N'(x) = 50 \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}, \text{ que s'anul·la quan } x = -1 \text{ i quan } x = 1.$$

Aquest darrer valor, que és l'únic que té sentit, és un màxim perquè abans la derivada és positiva i després és negativa. Per tant, el sou mitjà que correspon a la màxima venda d'entrades és de 1000 €.



- b. Si suposem que els sous de la població creixen indefinidament, com incidiria aquest fet en la venda d'entrades del cinema? [1 punt]

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ perquè el denominador és de grau més gran que el numerador. Acabaria amb el cinema buit.

5. Trobeu les matrius A i B sabent que

$$A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ i que } 2A + 3B = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}. [2 punts]$$

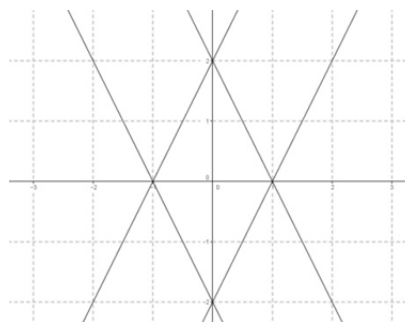
$$2A - 4B = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}. \text{ Resolent el sistema obtenim } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. Considereu la regió del pla limitada per les rectes

$$y = 2x + 2, y = -2x + 2, y = 2x - 2, y = -2x - 2$$

- a. Dibuixeu-la i calculeu-ne els vèrtexs. [1 punt]

Els vèrtexs són $(1,0)$, $(0,2)$, $(-1,0)$ i $(0,-2)$.



- b. Considereu ara la família de rectes $y = x + k$. Calculeu en quin punt de la regió s'obté el valor més gran de k , i determineu aquest valor. [1 punt]

Del dibuix es dedueix que el valor màxim és $k = 2$.