

SÈRIE 5

1. Si un venedor d'articles de luxe descompta el 20% sobre el preu de venda d'un article, guanya 1.848 € sobre el preu de cost; si descompta el 50%, perd 420 €.
- Calculeu el preu de cost i el preu de venda de l'article. [1 punt]
 - Quin percentatge aplica sobre el preu de cost per a calcular el preu de venda? [1 punt]
- a. Anomenarem x al preu de venda de l'article, i y al preu de cost. Les dades del problema es tradueixen com:

$$\left. \begin{array}{l} 0.8x = y + 1848 \\ 0.5x = y - 420 \end{array} \right\}$$

que dona com a solució $x = 7560$, $y = 4200$; el preu de cost va ser 4200 €, mentre que el preu de venda va ser de 7560 €.

b. $\frac{7560 - 4200}{4200} = 0.8$ Aplica un percentatge del 80%.

2. Unes proves de selectivitat s'han valorat amb notes entre 0 i 10. El nombre de persones que han rebut una determinada qualificació x ha vingut donada per la fórmula $N(x) = 250 - (2x - 9)^2$.
- Quantes persones han tret un 10 d'aquesta prova? Quantes han tret un 6? [1 punt]
 - Quina és la nota que han tret més persones? Quantes persones han tret aquesta nota? [1 punt]
- a. $N(10) = 129$. $N(6) = 241$.
- b. $N'(x) = -4(2x - 9)$, que s'anul·la quan $x = 4.5$; aquesta és la nota que han tret un nombre més gran d'alumnes. El nombre d'alumnes que l'han tret és $N(4.5) = 250$ alumnes.

3. La funció derivada d'una funció f és $f'(x) = e^{-x} \cdot (x - x^2)$.
- Estudieu el creixement i decreixement de la funció f . [1 punt]
 - Si en té, indiqueu les abscisses dels extrems relatius de la funció f , i classifiqueu-los. [1 punt]
- a. La variació de la funció f vindrà donada pel signe de f' . Com que l'exponencial és sempre estrictament positiva, aquest signe depèn només del factor polinòmic, que és positiu quan x està comprès entre 0 i 1. Per tant, f és estrictament creixent a $(0, 1)$, i estrictament decreixent a $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.
- b. Com a conseqüència de l'apartat anterior, la funció f té un mínim relatiu a $x = 0$ i un màxim relatiu a $x = 1$.

4. El propietari d'un bar ha comprat refrescos, cervesa i vi per un total de 5000 €, sense impostos. El vi val 600 € menys que els refrescos i la cervesa plegats. Si tenim en compte que pels refrescos ha de pagar un IVA del 6%, per la cervesa d'un 12% i pel vi d'un 30% aleshores la factura total, amb impostos inclosos, puja a un valor de 5924 €. Calculeu quant ha pagat, sense IVA, per cada tipus de beguda. [2 punts]

Si anomenem x la inversió en refrescos, y la inversió en cervesa i z la inversió en vi, les condicions de l'enunciat permeten escriure el sistema d'equacions següents:

$$\begin{cases} x + y + z = 5000 \\ z = x + y - 600 \\ 0,06x + 0,12y + 0,3z = 924 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 5000 \\ x + y - z = 600 \\ x + 2y + 5z = 15400 \end{cases}$$

Que si el resollem per Gauss ens dona la solució:

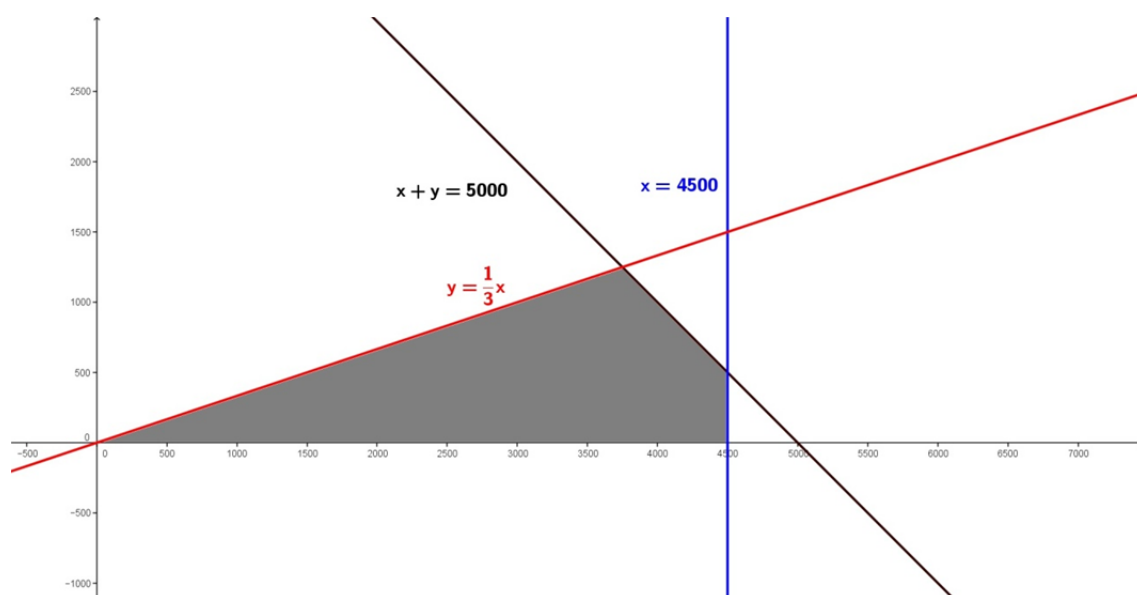
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 1 & 1 & -1 & 600 \\ 1 & 2 & 5 & 15400 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 0 & 0 & 2 & 4400 \\ 0 & 1 & 4 & 10400 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 5000 \\ 2z = 4400 \\ y + 4z = 10400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1200€ \\ y = 1600€ \\ z = 2200€ \end{cases}$$

5. Una companyia aèria programa una oferta d'un màxim de 5.000 places, entre turista i preferent. Per cada plaça de classe turista obté uns guanys de 30 €, mentre que per cadascuna de classe preferent el benefici és de 40 €. Per raons tècniques no és possible oferir més de 4.500 places en classe turista, i el nombre de places de preferent no poden superar la tercera part de les de classe turista. Calculeu quantes places de cada classe cal oferir per a maximitzar els guanys. [2 punts]

Si anomenem x al nombre de places en classe turista, i y les de preferent, les condicions del problema es tradueixen com:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 5000 \\ x \leq 4500 \\ y \leq \frac{1}{3}x \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\},$$

i els beneficis responen a la funció $B(x) = 30x + 40y$. Dibuint les dades del problema obtindrem:



Els vèrtexs del quadrilàter són, en sentit horari, $(0,0)$, $(3750,1250)$, $(4500,500)$, $(4500,0)$. Els beneficis corresponents són: $B(0,0) = 0$, $B(3750,1250) = 162.500$, $B(4500,500) = 155.000$, $B(4500,0) = 135.000$. Per tant, els màxims beneficis s'obtenen programant 3750 places de turista i 1250 en preferent.

6. Considerem la funció $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$.
- Si en té, determineu les asímptotes horitzontals i verticals de f . [1 punt]
 - Justifiqueu que la funció f és decreixent en tot el seu domini. [1 punt]
- a. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Per tant, $y = 0$ és una asímptota horitzontal. A més, $\lim_{x \rightarrow \pm 1} f(x) = \infty$. Per tant, $x = -1$ i $x = 1$ són asímptotes verticals de la funció.
- b. $f'(x) = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$. El numerador és negatiu i el denominador és positiu, per a tot valor del domini de f . Per tant, f és decreixent en tot el seu domini.