SÈRIE 1

PAUTES PER ALS CORRECTORS

RECORDEU:

- Podeu valorar amb tants decimals com considereu convenient, però aconsellem no fer-ho en més de dos decimals.
- Cal arrodonir a un decimal la nota final de l'examen, no les notes parcials.
- Cal traslladar la puntuació de cada pregunta a la casella **amb el número corresponent** de la primera pàgina de l'examen.

1. Donada una funció *f*, sabem que $f'(x) = e^{-x} \cdot (2x^2 - 3x)$.
   a. Estudieu el creixement i decreixement de la funció *f*. *[1 punt]*
   b. Si la funció f té extrems relatius, indiqueu-ne les abscisses i classifiqueu-los. *[1 punt]*

a. Estudiem el signe de f': la part exponencial és sempre estrictament positiva. Hem d'estudiar, per tant, $2x^2 - 3x = x(2x-3)$, que s'anul·la a x = 0 i a x = 3/2. Per tant, com que en els intervals $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ f' és positiva, la funció f serà estrictament creixent; a l'interval $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ f' és negativa. Per tant, f serà estrictament decreixent.

Criteris de correcció: Raonament: 0,5 p. Càlculs: 0,25 p. Resposta: 0,25 p.

b. Com a conseqüència de l'apartat anterior, la funció té un màxim relatiu per a x = 0, i un mínim relatiu per a x = 3/2.

Criteris de correcció: Determinació dels punts: 0,5 p. Classificació: 0,5 p.

2. La Júlia, en Pol i la Maria han anat a comprar fruita. La Júlia ha comprat un kilograms de pomes, dos de préssecs i tres de taronges, i ha pagat 9 €. En Pol ha comprat dos kilograms de pomes i quatre de préssecs, i ha pagat 12 €. La Maria, en canvi, ha comprat quatre kilograms de pomes i dos de taronges, i ha pagat 8 €. Calculeu el preu del kilogram de cadascuna de les fruites. *[2 punts]*

Anomenarem x al preu per quilo de pomes, y al de préssecs i z al de taronges. La traducció algebraica de l'enunciat serà el sistema d'equacions:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 9 \\ 2x + 4y &= 12 \\ 4x + 2z &= 8 \end{aligned}\right\}$$

En resoldre'l per qualsevol mètode obtenim x = 1.5, y = 2.25, z = 1. Per tant, les pomes van a 1.50 €/Kg, els préssecs a 2.25 €/Kg i les taronges a 1 €/Kg.

Criteris de correcció: Plantejar el problema: 1 p. Resolució: 0.5 p. Resposta al problema: 0.5 p.

3. Els dos darrers anys, el valor de les accions en Borsa d'una empresa ha baixat un 20% anual.
   a. Aquest any, en canvi, les accions han pujat un 30%. Quin és el percentatge global de pèrdua en aquests tres anys? *[1 punt]*
   b. Quin hauria de ser el percentatge de guanys d'aquest tercer any si el balanç global dels tres anys acaba sent equilibrat, és a dir, sense pèrdues ni guanys? *[1 punt]*

a. Suposem que una acció té un valor de C euros a l'inici del període. Aleshores el valor de l'acció serà:

- en acabar el primer any: 0,8 C.
- en acabar el segon any: $0{,}8^2 C = 0{,}64C$.
- en acabar el tercer any: $1{,}3 \cdot 0{,}64C = 0{,}832C$.

Per tant, el balanç final ha estat de $1 - 0{,}832 = 0{,}168$. S'han produït unes pèrdues globals del 16,8%.

Criteris de correcció: 0,5 p. pels càlculs al final de cada any. 0,5 p. pel percentatge final.

b. El valor final ha de ser igual al valor inicial. Per tant, ha de ser $C = 0{,}64 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right) C$ d'on obtenim x = 56,25%.

Criteris de correcció: 0,75 punts pel plantejament, 0,25 p. pel càlcul.

4. Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \end{pmatrix}$.
   a. Resoleu l'equació matricial $X + 2A = X \cdot A$, on X és la matriu incògnita. *[1 punt]*
   b. Hi ha cap matriu Y que verifiqui $Y \cdot A = B$? I que verifiqui $A \cdot Y = B$? Justifiqueu les respostes. *[1 punt]*

a. Aïllant X a l'equació obtenim $X \cdot (A - Id) = 2A$. Ara, ja sigui calculant $(A - Id)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ o bé plantejant un sistema de quatre equacions amb quatre incògnites, obtenim $X = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

Criteris de correcció: Aïllar X: (0.5 p. Càlcul de X: 0.5 p.

b. La primera de les respostes és positiva ja que $Y \cdot A = B \to Y = B \cdot A^{-1}$; aquest producte podrà efectuar-se ja que el nombre de columnes de B és igual al nombre de files de A^{-1}. També es pot respondre calculant-ho directament. Per la mateixa raó no és possible efectuar $A \cdot Y = B \to Y = A^{-1} \cdot B$.

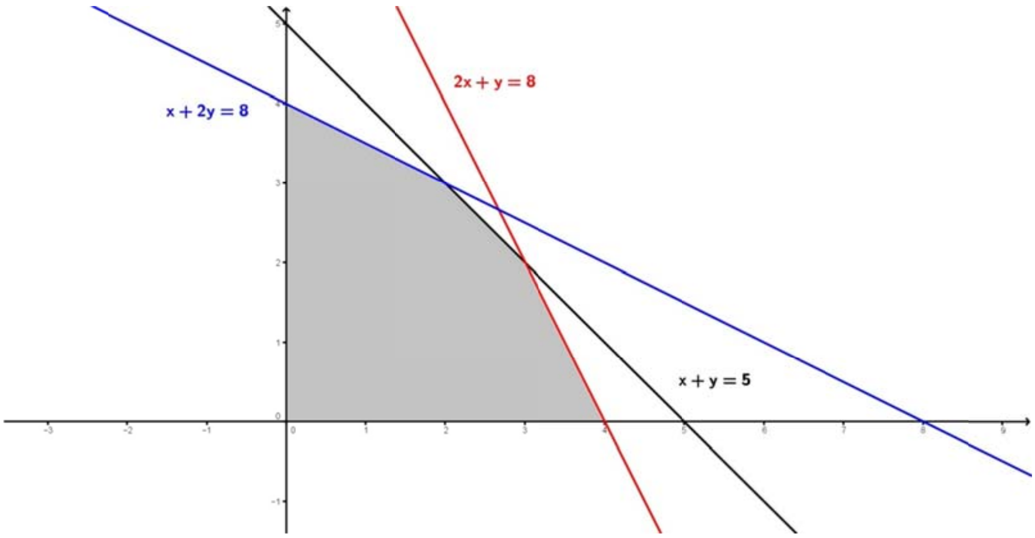
Criteris de correcció: 0.5 punts per cada justificació, a criteri del corrector.

5. Un florista disposa de 50 margarides, 80 roses i 80 clavells, i en fa rams de dues classes: per a uns fa servir 10 margarides, 20 roses i 10 clavells. Per a l'altra classe de rams fa servir 10 margarides, 10 roses i 20 clavells. La primera classe de rams es ven a 40 €, mentre que la segona es ven a 50 €. Quants rams de cada classe ha de fer si vol ingressar el màxim possible. *[2 punts]*

Si anomenem x al nombre de rams del primer tipus, i y al nombre de rams del segon tipus, les condicions del problema es tradueixin a:

$$\left.\begin{array}{r} 10x+10y \le 50 \\ 20x+10y \le 80 \\ 10x+20y \le 80 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y \le 5 \\ 2x+y \le 8 \\ x+2y \le 8 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{array}\right\}.$$

Dibuixant les dades del problema obtenim:



Els cinc vèrtexs són, en sentit horari: (0,0), (0,4), (2,3), (3,2) i (4,0). Els beneficis corresponen a la funció objectiu B(x,y) = 40x + 50y. En cada cas els beneficis són B(0,0) = 0, B(0,4) = 200, B(2,3) = 230, B(3,2) = 220, B(4,0) = 160. Per tant, els ingressos més grans s'obtenen fabricant 2 rams del primer tipus i 3 del segon tipus.

Criteris de correcció: Plantejament de les inequacions: 1 p. Càlcul dels vèrtexs: 0.5 p. Dibuix: 0.25 p. Càlcul del valor màxim: 0,25 p.

6. La demanda d'energia elèctrica d'una ciutat, comptada a partir de la mitjanit fins a les vuit del matí, és donada per la funció $f(t)=\dfrac{t^2-6t+12}{6}$, on t s'expressa en hores (h) i f(t) en milions de kilowatts hora (Kw h).
   a. A quina hora el consum coincideix amb el de la mitjanit, i quin és aquest consum? *[1 punt]*
   b. A quina hora es donarà el mínim consum? Justifiqueu que, efectivament, es tracta d'un mínim. *[1 punt]*

a. El consum a mitjanit és f(0) = 2. Ara caldrà determinar t amb f(t) = 2: $t^2-6t=0 \rightarrow t=0, t=6$: A les 6 h. del matí el consum serà el mateix que a mitjanit.

Criteris de correcció: Consum a mitjanit: 0.25 p. Plantejament i resolució de l'equació: 0.75 p..

b. $f'(t)=\dfrac{1}{6}(2t-6)$, que val zero quan t = 3. Com que f' és negativa abans de 3 i és positiva després de 3, efectivament es tracta d'un mínim.

Criteris de correcció: Càlcul del mínim: 0.5 p. Justificació que és mínim: 0.5 p.