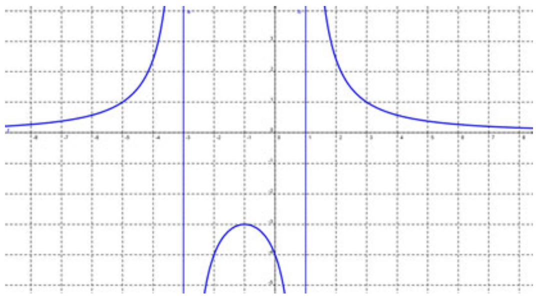
SÈRIE 3

1. Sobre la funció $f(x)=\dfrac{a}{x^2+bx+c}$ disposem de les dades següents:
   - Les seves asímptotes verticals són x = -3 i x = 1.
   - La seva gràfica passa pel punt (0,-4).
   a. Determineu la fórmula de la funció, i feu-ne un dibuix aproximat de la gràfica corresponent. *[1 punt]*
   b. En el cas a = 1, b = -2, c = -1 determineu i classifiqueu, si existeixen, els extrems relatius de la funció. *[1 punt]*

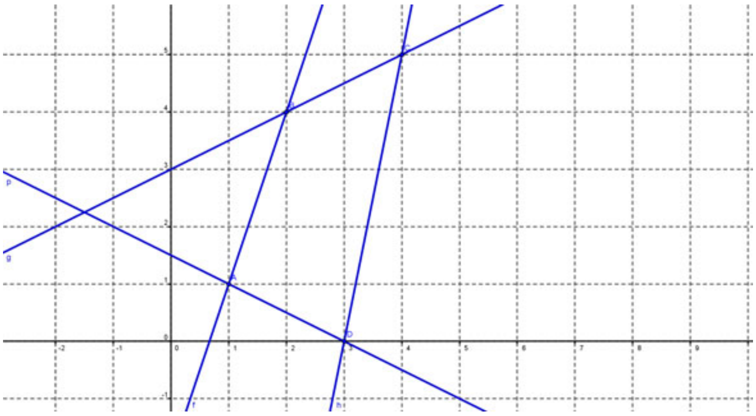
a. Les seves asímptotes fan que la funció hagi de ser de la forma $f(x)=\dfrac{a}{(x+3)(x-1)}$. A més tenim que $f(0)=\dfrac{a}{3\cdot(-1)}=-4 \rightarrow a=12$. Per tant, $f(x)=\dfrac{12}{x^2+2x-3}$. La seva gràfica és:



b. En aquest cas la funció és $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-1}$, i la seva derivada és $f'(x)=\dfrac{-2x+2}{(x^2-2x-1)^2}$, que s'anul·la per x = 1. Per tant, (1,-1/2) és l'únic extrem relatiu de la funció, i és un màxim perquè f' és positiva per valors propers a 1, però menors, i negativa per a valors propers a 1, però més grans.

2. Construïm en el pla el quadrilàter de vèrtexs A(1,1), B(2,4), C(4,5), D(3,0), els costats del qual són els segments AB, BC, CD i DA.
   a. Escriviu les desigualtats que determinen la regió del pla continguda i sobre els costats del quadrilàter ABCD. *[1 punt]*
   b. Feu servir les desigualtats anteriors per a justificar si els punts P(3,1), Q(3,4), R(5,2) són interiors, exteriors o estan sobre els costats del quadrilàter. *[1 punt]*

Per a facilitar el problema, dibuixem el quadrilàter:



Fent servir qualsevol dels mètodes trobem les equacions de les quatre rectes:

recta que passa per AB: 3x - y - 2 = 0
recta que passa per BC: x - 2y + 6 = 0
recta que passa per CD: 5x - y - 15 = 0
recta que passa per AD: x + 2y - 3 = 0

Per tant, les desigualtats que determinen el quadrilàter són:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - y - 2 \geq 0 \\ x - 2y + 6 \geq 0 \\ 5x - y - 15 \leq 0 \\ x + 2y - 3 \geq 0 \end{array}\right\}.$$

b. El punt P(3,1) verifica: 9 – 1 - 2 > 0, 3 – 2 + 6 > 0, 15 – 1 – 15 < 0, 3 + 2 – 3 > 0. Per tant, és interior al quadrilàter ABCD.
El punt Q(3,4) verifica 9 – 4 – 2 > 0, 3 – 8 + 6 > 0, 15 – 4 – 15 < 0, 3 + 8 – 3 > 0 . Per tant, és interior al quadrilàter ABCD.
El punt R(5,2) verifica: 15 - 2 - 2 > 0, 15 - 4 + 6 > 0, però 25 - 2 - 15 > 0. Per tant, és fora del quadrilàter ABCD.

3. Considerem les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.
    a. Justifiqueu si és possible efectuar A·B o B·A. En cas afirmatiu, calculeu-ho. *[1 punt]*
    b. Calculeu B^2 i B^3. *[1 punt]*

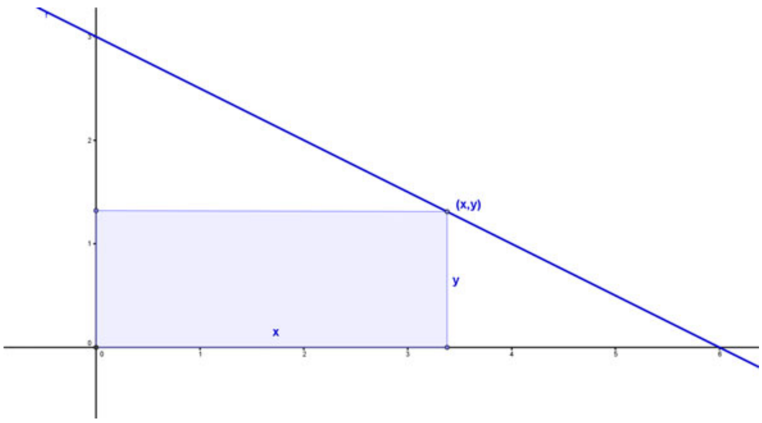
a. No és possible calcular A·B perquè el nombre de columnes de A és diferent del nombre de files de B. Sí que podem calcular B·A:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

b. $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$, $B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -31 \\ 0 & 125 \end{pmatrix}$𝕊

4. Un triangle té vèrtexs O(0,0), A(6,0), B(0,3).
    a. Dibuixeu-lo i escriviu l’equació de la recta que conté el segment AB. *[0,5 punts]*
    b. Considerem un punt P situat sobre el segment AB, i dibuixem el rectangle que té diagonal OP i dos costats sobre els eixos de coordenades. Determineu les coordenades de P que fan màxima l’àrea del rectangle. *[1,5 punts]*

a. L’equació de la recta que conté el segment AB és $y = -\frac{1}{2}x + 3$. El triangle, i el rectangle de què ens parlen a l’apartat b., són aquests:



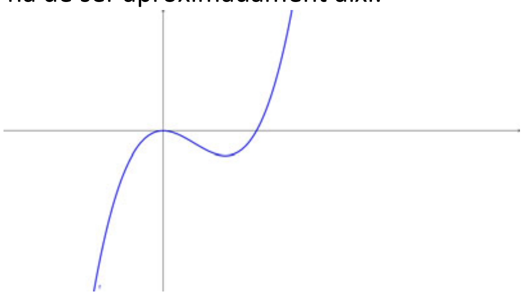
b. Com que el punt (x,y) es troba sobre la recta, les seves coordenades han de ser de la forma $\left(x, -\frac{1}{2}x+3\right)$. L'àrea del rectangle és, per tant,

$$A(x) = x\left(-\frac{1}{2}x+3\right) = -\frac{1}{2}x^2+3x$$

$A'(x) = -x+3 = 0$ quan x = 3. A més, quan x < 3 la derivada positiva i quan x > 3 és negativa: x = 3 correspon a un màxim relatiu. El punt demanat és, per tant, $P\left(3, \frac{3}{2}\right)$.

5. Sigui f una funció polinòmica de grau 3 amb un màxim a (0,0) i un mínim a (2,-4).
   a. Feu una gràfica aproximada de f. *[0,5 punts]*
   b. Determineu la fórmula de la funció. *[1,5 punts]*

a. La gràfica de la funció ha de ser aproximadament així:



b. L'equació és de la forma $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ i $f'(x) = 3ax^2+2bx+c$. Amb les dades que tenim podem escriure:

- $f(0) = 0 \rightarrow d = 0$.
- $f(2) = 8a+4b = -4$.
- $f'(0) = c = 0$.
- $f'(2) = 12a+4b = 0$.

D'aquestes condicions obtenim a = 1, b = -3, c = 0, d = 0. La fórmula de la funció és, per tant, $f(x) = x^3-3x^2$.

6. En Joan, en Pere i en Marc tenen, entre els tres, seixanta-tres anys. Si en Joan tingués tres anys menys, la seva edat seria el doble de les edats d'en Pere i en Marc junts. Si en Pere tingués un any més, la seva edat seria la meitat de la d'en Marc. Quina és l'edat actual de cadascun d'ells? *[2 punts]*

El sistema que es dedueix de les dades és, si anomenem J, P, M les respectives edats:

$$\left.\begin{aligned} J+P+M &= 63 \\ J-3 &= 2(P+M) \\ P+1 &= \frac{1}{2}M \end{aligned}\right\}.$$

Ordenant les incògnites i resolent el sistema pel mètode de Gauss obtindrem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 63 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 63 \\ 0 & -3 & -3 & -60 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 63 \\ 0 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -3 & -42 \end{array}\right).$$

D'aquí obtenim de seguida $J = 43$, $P = 6$, $M = 14$, que són les edats respectives d'en Joan, en Pere i en Marc.

SÈRIE 1

2. La població de bacteris en una mostra evoluciona segons la funció $f(t) = -t^2 + 4t + 12$, on *t* correspon al nombre de setmanes des de l'inici de l'experiment, i *f(t)* és el nombre d'individus que formen la mostra, en milions d'unitats.
   a. Quantes setmanes han de passar fins a la desaparició de la població? *[1 punt]*
   b. Quin serà el nombre màxim d'individus de la mostra, i al cap de quantes setmanes es donarà? *[1 punt]*

a. $f(t) = -t^2 + 4t + 12 = -(t+2)\cdot(t-6) = 0$ quan t = 6. La població de bacteris desapareixerà passades 6 setmanes.
b. $f'(t) = -2t + 4$, que s'anul·la a t = 2. Per tant, el màxim de població de bacteris es donarà a t = 2. El nombre de bacteris en aquest moment serà de f(2) = 16 milions de bacteris a la mostra.

3. Construïm en el pla el triangle de vèrtexs A(-3,1), B(1,2), C(-2,3).
   a. Trobeu les inequacions que determinen la regió del pla continguda i sobre els costats del triangle ABC. *[1 punt]*
   b. Justifiqueu si els punts P(0,2), Q(2,2), R(-1,2) són interiors, exteriors o es troben sobre els costats del triangle. *[1 punt]*

a. Fent servir qualsevol dels mètodes trobem les equacions de les tres rectes:

recta que passa per AB: x – 4y + 7 = 0
recta que passa per BC: x + 3y - 7 = 0
recta que passa per AC: 2x - y + 7 = 0

Per tant, les desigualtats que determinen el triangle són:

$$\left.\begin{aligned} x - 4y + 7 &\le 0 \\ x + 3y - 7 &\le 0 \\ 2x - y + 7 &\ge 0 \end{aligned}\right\}$$

b. El punt P(0,2) verifica: -8 + 7 < 0, 6 – 7 < 0, -2 + 7 > 0. Per tant, és interior al triangle ABC.
El punt Q(2,2) no verifica la primera desigualtat: 2 -8 + 7 > 0. Per tant, és exterior al triangle ABC.
El punt R(-1,2) verifica: -1 - 8 + 7 < 0, -1 + 6 – 7 < 0, -1 - 2 + 7 > 0. Per tant, és interior al triangle ABC.

4. Donada la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, determineu els valors dels tres paràmetres sabent que la gràfica de la funció passa pel punt (1,18) i que té extrems relatius per a x = -2 i x = 4. *[2 punts]*

- f(1) = 18. Per tant, 1 + a + b + c = 18.
- $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Per tant, f'(-2) = 12 – 4a + b = 0, f'(4) = 48 + 8a + b = 0.

De les tres condicions es dedueix a = -3, b = -24, c = 44.

5. Una empresa cinematogràfica disposa de tres sales, A, B i C. Els preus d'entrada a aquestes sales són de 7, 8 i 9 €, respectivament. Un dia determinat la recaptació conjunta de les tres sales va ser de 1520 €, i el nombre total d'espectadors va ser de 200. Si s'haguessin intercanviat els espectadors de les sales A i B, la recaptació total s'hauria incrementat en 20 €. Calculeu el nombre d'espectadors que va acudir a cada una de les sales. *[2 punts]*

Si anomenem x, y, z el nombre d'espectadors de les sales A, B i C respectivament, obtindrem el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 7x + 8y + 9z = 1520 \\ x + y + z = 200 \\ 8x + 7y + 9z = 1540 \end{array}\right\}$$

que, una vegada resolt per qualsevol mètode, dóna com a solució x = 100, y = 80, z = 20. Per tant, la sala A va estar ocupada per 100 espectadors, la B per 80 i la C per 20 espectadors.

6. Considerem la funció $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3}$.
   a. Escriviu la fórmula de la funció que a cada nombre real, x, li fa correspondre el pendent de la recta tangent a f en el punt d'abscissa x. *[1 punt]*
   b. Determineu l'equació del la recta tangent a la gràfica de f en el punt d'abscissa x = -1. *[1 punt]*

a. La funció de què ens estan parlant no és més que la funció derivada, que anomenarem p(x):

$$p(x) = f'(x) = \frac{-2x}{\left(x^2 + 3\right)^2}.$$

b. Com que $f(-1) = \dfrac{1}{4}$ i $f'(-1) = \dfrac{1}{8}$, la recta tangent és $y - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}(x + 1)$.

7. Siguin les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & -8\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}8 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}$.

   a. Determineu les matrius X i Y tals que X – 2Y = A i 2X – Y = B. *[1 punt]*
   b. Calculeu $(A+2\cdot Id)^2$, on Id és la matriu identitat. *[1 punt]*

a. Resolent el sistema com un sistema numèric obtenim $X=\frac{1}{3}(2B-A)$, $Y=\frac{1}{3}(B-2A)$ d'on, operant, obtenim $X=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 10/3 & 2\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 8/3 & 5\end{pmatrix}$.

b. $(A+2\cdot Id)^2=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -2 & -6\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}15 & 9\\ 6 & 42\end{pmatrix}$.