

SÈRIE 1

1.

Anomenarem x , y , z als preus de compra de cada immoble. Amb aquestes incògnites, les dades del problema es tradueixen algebraicament en el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 0,2x + 0,5y + 0,25z = 0,6 \\ 0,8x + 0,9y + 0,85z = 1,7 \end{array} \right\}.$$

Per a facilitar la resolució del sistema multiplicarem per 10 la segona i la tercera equacions. El sistema queda així:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 2x + 5y + 2,5z = 6 \\ 8x + 9y + 8,5z = 17 \end{array} \right\},$$

que resoldrem pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2,5 & 6 \\ 8 & 9 & 5,5 & 17 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0,5 & 2 \\ 0 & 1 & 0,5 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0,5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 3y + 0,5z = 2 \\ z = 1 \end{array} \right\}$$

que, substituint, ens dóna la solució del sistema: $x = 1/2$, $y = 1/2$, $z = 1$. La resposta a la pregunta és que els preus de compra dels immobles han estat de 500.000 euros els dos primers i 1 milió d'euros el tercer immoble.

2.

- a. Les rectes són $y = -x + 6$ i $y = -\frac{1}{2}x + 5$. El sistema d'inequacions que verifiquen els punts de la regió ombrejada és:

$$\left. \begin{array}{l} y \geq -x + 6 \\ y \leq -\frac{1}{2}x + 5 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}.$$

- b. Els vèrtexs de la regió factible són $(6,0)$, $(10,0)$ i $(2,4)$. A més, $z(6,0)=6$, $z(10,0)=10$, $z(2,4)=10$. El màxim de la funció z a la regió factible és 10, i s'assoleix en tot el segment d'extremes $(10,0)$ i $(2,4)$.

3.

a. $f'(x) = \frac{2x(a-x)}{(ax+1)^2}$. Per a tenir un extrem en $x = 1$ cal que es verifiqui $f'(1) = 0$, és a

dir, $2(2+a) = 0$ que es verifica quan $a = -2$. Ara tindrem que $f'(x) = \frac{4x(1-x)}{(-2x+1)^2}$. Si

$0 < x < 1, f'(x) > 0$ i si $x > 1, f'(x) < 0$. Per tant, $x = 1$ correspon a un màxim relatiu.

b. Si $a = 3$, $f(x) = \frac{2x^2}{3x+1}$. Per tant, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. La funció no té asímptotes horitzontals.

$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} f(x) = \infty$. Per tant, la funció té la recta $x = -\frac{1}{3}$ com a asímptota vertical.

4.

a. Si $A \cdot B$ ha de ser una matriu quadrada d'ordre 2, cal que la matriu B tingui tres files. Per tant,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

D'aquí obtenim $a = 2$, $b = -3$, $c = 1$, $d = 2$. La matriu serà $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

b. $(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$.

$$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

5.

a. La funció de beneficis serà $B(x) = I(x) - C(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 320x - 12000$. Tindrem, doncs, que $B(x) = 0$ si $x = 40$ o $x = 600$. En aquest interval la funció serà positiva: els beneficis seran positius sempre que produïm entre 40 i 600 bicicletes.

b. $B'(x) = -x + 320$. Si $x < 320$, $B' > 0$ i si $x > 320$, $B' < 0$: $x = 320$ correspon al màxim de beneficis, que és de 39200 €. A cada bicicleta guanyem, doncs, $39200/320=122,50$ €

6.

a. El domini de f està format per tots els nombres reals. A més $f'(x) = 1 + 3e^{-3x}$. Com que la funció exponencial és estrictament positiva, f' també ho és. Per tant, f és estrictament creixent.

b. $f(0) = -1, f'(0) = 4$; la recta tangent serà $y = 4x - 1$.

SÈRIE 4

1.

a.

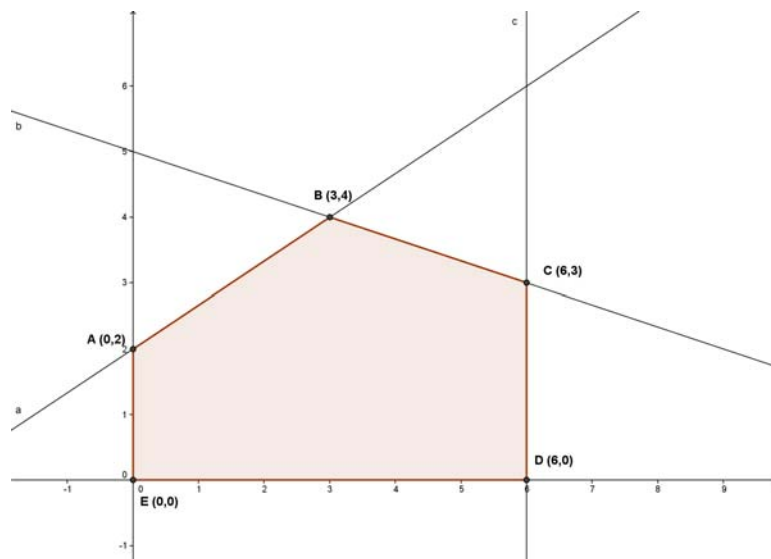
El domini de f coincideix amb el de la funció logarítmica: es tracta dels nombres reals estrictament positius. La funció és contínua en tot el seu domini. Per tant, com que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$, l'asíptota vertical de la funció f és $x = 0$.

b.

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, que s'anul·la quan $1 - \frac{1}{x} = 0 \rightarrow x = 1$. Com que la derivada és negativa quan $0 < x < 1$ i és positiva quan $x > 1$, tenim que f és decreixent quan $0 < x < 1$ i és creixent quan $x > 1$. Com que $f(1) = 1 - 0 = 1$, la funció f té un mínim en el punt $(1,1)$.

2.

a.



Al gràfic adjunt tenim la regió i els seus vèrtexs. El punt $P(1,3)$ no pertany a la regió ja que el punt $(1,2)$ és de la recta AB . El punt $Q(3,3)$ sí que hi pertany ja que es troba per sota del punt B , en la mateixa vertical.

b.

$$F(0,2) = 8, F(3,4) = 19,$$

$$F(6,3) = 18, F(6,0) = 6,$$

$F(0,0) = 0$. Per tant, el valor màxim és 19, i es dona en el punt B . El valor mínim és 0, i es dona en el punt E .

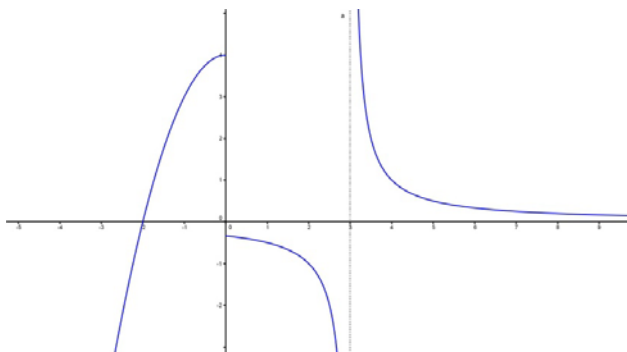
3.

a. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$

b. $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}.$

4.

a.



La funció és discontinua a $x = 0$ (els límits laterals són diferents) i a $x = 3$ (la funció hi té una asímptota).

b. Quan $x > 0$, $f'(x) = -\frac{1}{(x-3)^2}$. Per tant, $f'(4) = -1$ i $f(4) = 1$. L'equació de la recta tangent serà $y = -x + 5$.

Críteris de correcció: 0,5 punts pel càlcul de la derivada. 0,5 punts per la determinació de la recta tangent.

5.

a. Aplicant Gauss tindrem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 3 & -4 & -5 \end{array} \right)$$

On ja es veu que les matrius associada i ampliada són de rang 2. Per tant, el sistema és compatible indeterminat. La seva solució és:

$$x = \frac{4+z}{3}, y = \frac{4z-5}{3}, z = z.$$

b. $x + y + z = 5 \rightarrow z = 2, y = 1, x = 2$.

6.

a. F és una funció exponencial amb la base menor que 1. Per tant, és decreixent.

b. $40000 \cdot 0,94^t = 20000 \rightarrow 0,94^t = \frac{1}{2} \rightarrow t = -\frac{\ln 2}{\ln 0,94} = 11,20$. Caldrà que passin més d'onze anys.