

SÈRIE 1

Pregunta 1

a.

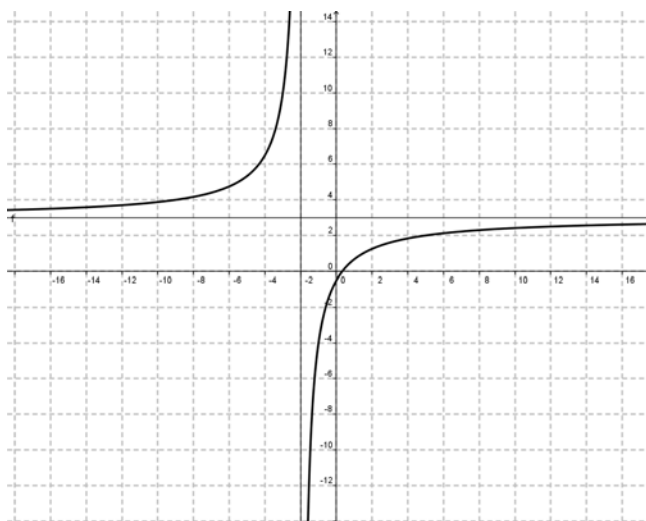
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-1}{x+2} = 3$. Per tant, $y = 3$ és asímptota horitzontal de f .

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x-1}{x+2} = \infty$. Per tant, $x = -2$ és asímptota horitzontal de f .

b.

En ser creixent en tot el seu domini i correspondre $x = -2$ a una asímptota

vertical, $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x-1}{x+2} = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3x-1}{x+2} = -\infty$, La gràfica de la funció és:



Pregunta 2

a.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = b$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^0 + 1 = 2$. Si la funció ha de ser contínua en $x = 0$, cal que sigui $b = 2$.

b.

Per a valors positius de x tenim $f'(x) = -e^{-x}$, que és estrictament negativa. Per tant, f és decreixent per a tots els valors positius de x .

Pregunta 3

Cada llapis A costa 50 €. Per tant, cada llapis B costa $\frac{90}{100} \cdot 50 = 45$ €, i cada

llapis C costa $\frac{60}{100} \cdot 50 = 30$ €. Si anomenem x al nombre de llapis de tipus A

que han venut, y al nombre de llapis de tipus B i z al nombre de llapis de tipus C, les dades del problema es tradueixen algebraicament com:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 225 \\ 50x + 45y + 30z = 10.500 \\ x = 2(y + z) \end{array} \right\} \text{ o bé, } \left. \begin{array}{l} x + y + z = 225 \\ 50x + 45y + 30z = 10.500 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{array} \right\} . \text{ Dividint per 5 la}$$

segona equació i resolent pel mètode de Gauss tindrem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 10 & 9 & 6 & 2100 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 40 \\ 0 & 1 & 4 & 150 \\ 0 & 3 & 3 & 225 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 0 & 1 & 4 & 150 \\ 0 & 0 & 9 & 225 \end{array} \right) \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 225 \\ y + 4z = 150 \\ 9z = 225 \end{array} \right\}$$

d'on obtenim $z = 25$, $y = 50$, $x = 150$. Per tant, la botiga ha venut 150 llapis de tipus A, 50 de tipus B i 25 de tipus C.

Pregunta 4

a.

La funció cost mitjà serà, per tant, $Q(q) = \frac{q^2}{100} + 4 + \frac{20}{q}$. Per tant,

$$Q(5) = \frac{25}{100} + 4 + \frac{20}{5} = 8,25;$$

$$Q(20) = \frac{400}{100} + 4 + \frac{20}{20} = 9.$$

b.

$$Q'(q) = \frac{q}{50} - \frac{20}{q^2} = \frac{q^3 - 1000}{50q^2}. \text{ Aquesta derivada s'anul·la quan } q = 10.$$

Si $q < 10$, Q' és negativa. Si $q > 10$, Q' és positiva. Per tant, $q = 10$ correspon a un mínim, i el cost corresponent és $Q(10) = 7$.

Pregunta 5

a.

La recta AC és $x = 2$. La recta AB és $y = 0$. La recta BC és $y = -2x + 8$. Per tant, les inequacions demanades són:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 2 \\ y \leq -2x + 8 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}.$$

b.

$z(2,4) = 8$; $z(2,0) = 4$; $z(4,0) = 8$. Per tant, el valor màxim és 8, i s'assoleix en tots els punt del segment AC.

Pregunta 6

a.

Si el sistema ha de ser incompatible, la recta r' ha de ser de la forma $x + 2y = k$. Si ha de passar per l'origen, cal que sigui $k = 0$. Les rectes r i r' són paral·leles.

b.

Si el sistema és compatible indeterminat significa que té tota una recta de solucions: les rectes r i s són, per tant, la mateixa recta.

SÈRIE 4**Pregunta 1**

Anomenarem x al nombre d'ampolles d'aigua, y al nombre d'ampolles de llet i z al nombre d'ampolles de suc que hem comprat. Aleshores les dades del problema es tradueixen en:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 40 \\ 0,5x + y + 1,5z = 38 \\ x + 0,5y + 1,5z = 34 \end{array} \right\}.$$

Resolent-lo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 40 \\ 0,5 & 1 & 1,5 & 38 \\ 1 & 0,5 & 1,5 & 34 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 40 \\ 0 & 1 & 2 & 36 \\ 0 & -0,5 & 0,5 & -6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 36 \\ 0 & 0 & 3 & 24 \end{array} \right) \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 5y + 2z = 2 \\ y + 2z = 36 \\ 3z = 24 \end{array} \right\}$$

que, una vegada resolt, ens dona $x = 12$, $y = 20$, $z = 8$, és a dir, hem comprat 12 ampolles d'aigua, 20 de llet i 8 de suc de fruites.

Pregunta 2

a.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. Per tant, la funció no té asymptota horitzontal.

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty$. Per tant, la recta $x = -1$ és asymptota vertical de f .

b.

$f'(x) = \frac{-4x^2 - 8x}{(x+1)^2} = -3$ que, un cop ordenada, ens dona $x^2 + 2x - 3 = 0$, d'on

obtenim $x = 1$ i $x = -3$. Per tant, com que $f(1) = -2$ i $f(-3) = 18$, els dos punts són $(1, -2)$ i $(-3, 18)$.

Pr

Pregunta 3

a.

$f'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x}(1-x)$. com que el primer factor és sempre positiu i el segon només s'anul·la a $x = 1$ tenim que la funció és creixent per a $x < 1$ i decreixent per a $x > 1$. Per tant, $x = 1$ correspon a un màxim relatiu.

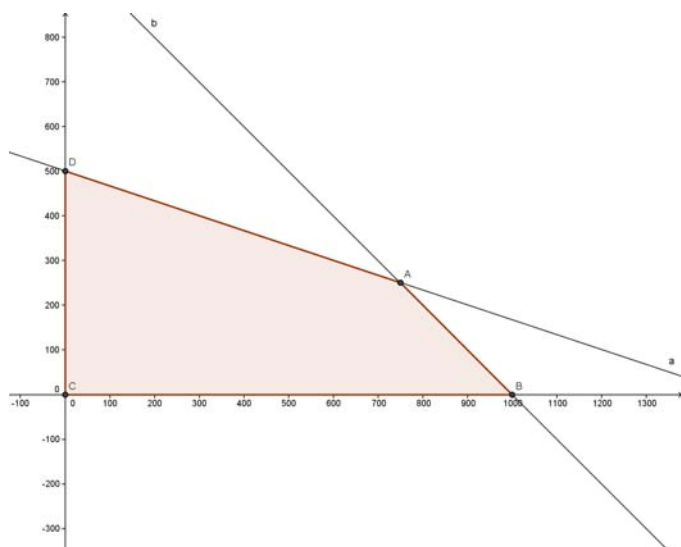
b.

$f(0) = 0$ i $f'(0) = 1$. Per tant, la recta demanada és $y = x$.

Pregunta 4

Anomenarem x al nombre de lots de tipus A, i y al nombre de lots de tipus B que venen. La traducció de les dades del problema és, aleshores,

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y \leq 1500 \\ x + y \leq 1000 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\}$$



La funció objectiu és la funció dels guanys: $G(x,y) = 0,7x + y$. Si ara dibuixem la regió factible del problema obtindrem el gràfic adjunt.

El vèrtex A de la regió factible es determina com a intersecció de les dues rectes, i resulta ser el punt $A(750,250)$. De la mateixa

manera obtenim $B(1000,0)$, $C(0,0)$, $D(0,500)$. La funció de guanys en aquests punts és, doncs: $G(750,250) = 775$, $G(1000,0) = 700$, $G(0,0) = 0$, $G(0,500) = 500$. Per tant, els convé vendre 750 lots de tipus A i 250 lots de tipus B.

Pregunta 5

a.

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}; \quad (A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'altra banda,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}; \quad B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Per tant.}$$

$$A^2 + 2A \cdot B + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -6 \\ -2 & 5 & 6 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix}. \quad \text{No són}$$

iguals.

b.

$(P+Q)^2 = P^2 + P \cdot Q + Q \cdot P + Q^2$, que serà el mateix que $P^2 + 2P \cdot Q + Q^2$ quan es verifiqui $P \cdot Q = Q \cdot P$, és a dir, les matrius P i Q commutin.

Pregunta 6

a.

$$f(0) = 162,$$

$0 = -2x^2 + 48x + 162 = -2(x^2 - 24x - 81) = -2(x - 27)(x + 3) \rightarrow x = 27$. En el moment de declarar-se l'epidèmia hi havia 162 animals malalts. L'epidèmia durarà 27 setmanes.

b.

$f'(x) = -2(2x - 24)$ que s'anul·la per a $x = 12$. Correspon a un màxim ja que per a $x < 12$ la derivada és positiva, i per a $x > 12$ és negativa. A més, $f(12) = 450$. Per tant, el nombre més gran d'animals afectats es donarà a la dotzena setmana, i n'hi haurà 450.

SÈRIE 5

Pregunta 1

a.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 5y + 2z = 2 \\ -6y - 3z = 0 \end{array} \right\}$$

Aïllant obtenim la solució general en funció de z:

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}z + 2 \\ y = -\frac{1}{2}z \end{array} \right\}$$

b.

Si fem $z = 2$ obtenim $x = 3$, $y = -1$.

Pregunta 2

Les dimensions de la finestra seran de x dm. horitzontals per y dm. verticals.

D'una banda tenim que $x \cdot y = 100$ d'on $y = \frac{100}{x}$. Per tant, el cost de la

finestra serà $C(x) = 6x + \frac{2400}{x}$, funció de la que hem de trobar el seu mínim.

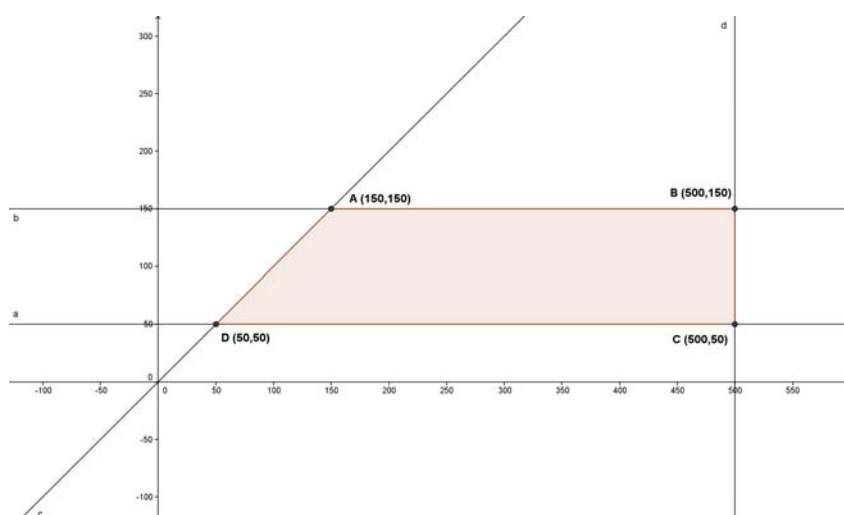
Tindrem $C'(x) = 6 - \frac{2400}{x^2}$. Aquesta derivada s'anul·la quan $x = 20$, que correspon a un mínim ja que la funció $C(x)$ és decreixent quan $x < 20$ i és creixent quan $x > 20$. Per tant, les dimensions de la finestra que la fan el més barata possible són de 20 dm. horitzontals per 5 dm. verticals.

Pregunta 3

Suposarem que el concessionari ven x motos de 50 cc. i y motos de 125 cc. Aleshores els guanys del concessionari seran de $G(x,y) = 600x + 1000y$, i les restriccions de l'enunciat es tradueixen com:

$$\left. \begin{array}{l} y \geq 50 \\ y \leq 150 \\ x \geq y \\ x \leq 500 \end{array} \right\} .$$

La representació gràfica de la regió factible és:



Tindrem, doncs, $G(150,150) = 240.000$, $G(500,150) = 450.000$, $G(500,50) = 350.000$, $G(50,50) = 80.000$. Per tant, els màxims guanys es produiran quan venen 500 motos de 50 cc. i 150 motos de 125 cc.

Pregunta 4

a.

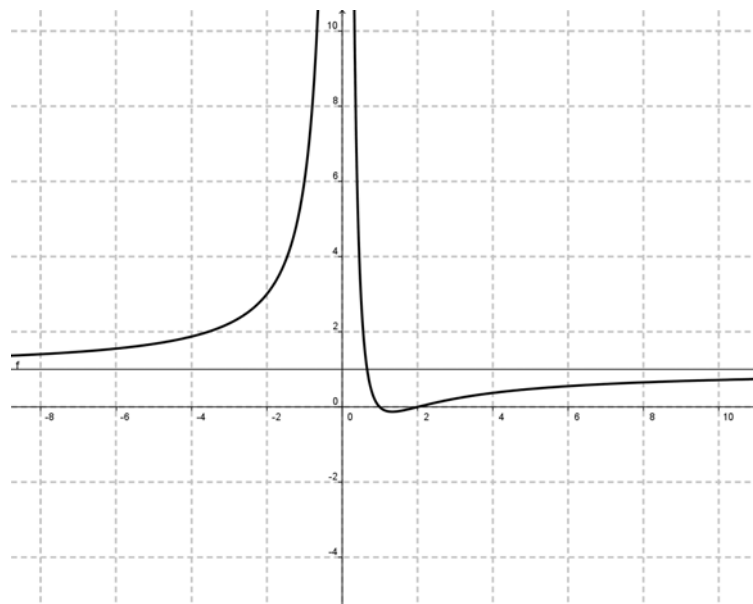
$$f'(x) = \frac{(2x-3) \cdot x^2 - (x^2-3x+2) \cdot 2x}{x^4} = \frac{3x-4}{x^3}. \text{ La recta } x+y=5 \text{ té pendent}$$

-1. Tindrem, doncs, $\frac{3x-4}{x^3} = -1 \rightarrow x^3 + 3x - 4 = 0 \rightarrow x = 1$. Com que $f(1) = 0$, el punt demanat és el (1,0).

b.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$: la recta $y = 1$ és asímptota horitzontal de la funció f .

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$: la recta $x = 0$ és asímptota vertical de la funció f .

**Pregunta 5**

a

La funció f és producte de dos factors que no són negatius per a cap valor de x . Per tant, no existeix cap valor de x tal que $f(x) < 0$. $f(0)=0$, i cap altre valor no ho pot verificar ja que, per a tot x , $e^x > 0$.

b

$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = x \cdot e^x(2+x)$. $f'(-1) = -e^{-1} \cdot 1 < 0$: la funció és decreixent en aquest punt.

Si $x > 0$ els tres factors de f' són estrictament positius. Per tant, f és creixent per a tot valor positiu de x .

Pregunta 6

a.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right). \text{ Tenim que } A^{-1} = A.$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \text{ Per tant, } B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b.

$$A \cdot X \cdot B = 2C \rightarrow X = A^{-1} \cdot 2C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 12 & -8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$