

SÈRIE 1

QÜESTIONS

1. Considereu el sistema d'inequacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 10 \\ x + y \leq 8 \\ x \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- a) Representeu gràficament la regió de solucions [1 punt]
 b) Determineu el màxim de la funció $f(x, y) = 2x + y$ en aquesta regió. Digueu per a quins valors s'assoleix aquest màxim. [1 punt]

Puntuació: Descomptar 0.5 punts en b) si no donen tot l'interval solució.

Solució:

- a) Els punts d'intersecció són:

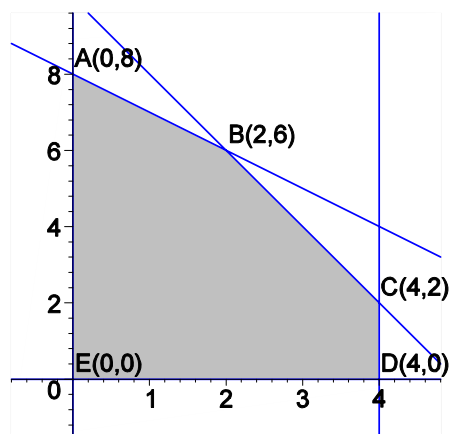
$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + y = 10 \end{cases} \rightarrow B = (2, 6)$$

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x = 4 \end{cases} \rightarrow C = (4, 2)$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow D = (4, 0)$$

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow A = (0, 8)$$

La gràfica és:



b) Els valors de $f(x, y)$ en els vèrtexs de la regió solució són:

	A(0,8)	B(2,6)	C(4,2)	D(4,0)	E(0,0)
$f(x, y) = 2x + y$	8	10	10	8	0
		màxim	màxim		

I s'obté el màxim en **tot el segment BC** i té per valor **$f(x, y) = 10$** .

2. Digueu si un sistema de dues equacions amb tres incògnites pot ser incompatible. Justifiqueu la resposta i, si escau, exemplifiqueu-ho. [2 punts]

Puntuació: Posar un bon exemple 1.5 punts; raonament 0.5 punts. Total 2 punts.

Solució:

Un sistema amb més d'una equació pot ser incompatible, independentment del nombre d'incògnites. Només cal que hi hagi, per exemple, dues equacions amb termes de les incògnites iguals i els termes independents diferents. Aleshores, cap valor de les incògnites satisfarà ambdues equacions.

Exemple:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{array} \right\}$$

3. Calculeu els paràmetres a, b, c de la funció $f(x) = ax^2 + bx + c$, sabent que la recta $5x - y - 2 = 0$ és tangent a la corba $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 0$ i que el valor mínim absolut que pren la funció és $-49/12$. [2 punts]

Puntuació: Raonament i/o planteig correcte 1 punt; solució 1 punt; Total 2 punts.

Solució:

El pendent de la recta tangent a la paràbola en un punt d'abscissa x és el valor de la derivada $f'(x) = 2ax + b$, i si $x = 0$, el pendent és b . El pendent de la recta és 5, i per tant ha de ser **$b = 5$** . Per $x = 0$ el valor de y de la recta és $y = -2$, i el valor de y de la paràbola és c . Per tant ha de ser **$c = -2$** . El valor mínim de $f(x)$ s'obté en el punt on $f'(x) = 2a + b = 0$, o sigui per $x = -\frac{b}{2a}$, i en aquest punt, la funció pren el valor

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2}{4a} + c$$

Substituint els valors de b, c obtenim $-\frac{25}{4a} - 2 = -\frac{49}{12}$, d'on resulta **$a = 3$** . Per tant la

funció és **$f(x) = 3x^2 + 5x - 2$** .

4. Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} 3x - y + 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + 3y = 0 \end{array} \right\}$$

- a) Expliqueu, raonadament, quantes solucions té.
b) Trobeu una solució amb $z = 5$.

[1 punt]

[1 punt]

Solució:

- a) És un sistema homogeni. Per tant sempre té almenys la solució trivial $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. En aquest cas, resolent per Gauss tenim:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -10 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I per tant té una infinitat de solucions, dependent del valor de z .

$$-5y = -z; \quad y = \frac{1}{5}z;$$

$$x = -3y; \quad x = -\frac{3}{5}z;$$

- b) Per $z = 5$, resulta $y = 1, x = -3$.

PROBLEMES

5. Un llibreter vol fer una comanda de dos classes de llibres a dos editors, A i B. L'editor A ofereix lots de 5 llibres d'assaig i 5 novel·les per 50 €. L'editor B ofereix lots de 5 llibres d'assaig i 10 novel·les per 150 €. El llibreter vol comprar, com a mínim, 2500 llibres d'assaig i 3500 novel·les. Per un compromís adquirit amb l'editor B, no pot comprar a l'editor A més de 3 vegades el que compra a l'editor B. Determineu quants lots haurà de comprar a cada editor per minimitzar a el cost i poder complir el seu compromís. [4 punts]

Puntuació: Inequacions 1 punt; vèrtexs 1 punt; gràfica 1 punt; solució 1 punt. Total 4 punts.

Solució:

Planteig: Taula de dades:

	assaig	novel·la	preu/lot
A	5	5	50
B	5	10	150
	2500	3500	

Siguin x, y el nombre de lots que compra respectivament als llibreterers A i B.

Inequacions:

$$\left. \begin{array}{l} 5x+5y \geq 2500 \\ 5x+10y \geq 3500 \\ x \leq 3y, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y \geq 500 \\ x+2y \geq 700 \\ x \leq 3y, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Vèrtexs:

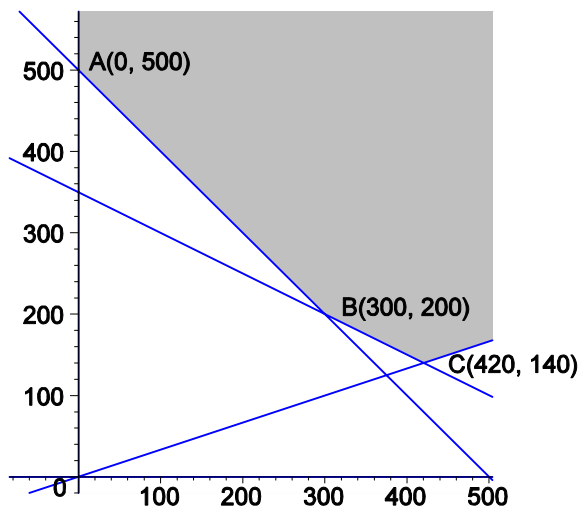
$$\left. \begin{array}{l} x+y = 500 \\ x = 0 \end{array} \right\} \rightarrow A(0,500) \quad \left. \begin{array}{l} x+y = 500 \\ x+2y = 700 \end{array} \right\} \rightarrow A(300,200)$$

$$\left. \begin{array}{l} x+2y = 700 \\ x = 3y \end{array} \right\} \rightarrow C(420,140)$$

Funció objectiu: $f(x, y) = 50x + 150y$.

S'ha de trobar el seu mínim absolut.

Gràfica :



Valors de la funció de cost:

	A(0,500)	B(300,200)	C(420,140)
$f(x, y) = 50x + 150y$	75000	45000	42000

Per altra banda, sobre la semirrecta $y = \frac{1}{3}x$ que s'inicia en el punt C(420,140) en el

sentit d'augmentar x i y , el valor de la funció és: $f(x, y) = 50x + 150\frac{x}{3} = 100x$ que creix

al créixer x . Per tant, el punt C(420,140) representa clarament el mínim de la funció.

Ha de comprar 420 lots al llibreter A i 140 lots al llibreter B i el cost total mínim corresponent, preservant les restriccions, és de 42000 €.

6. La taxa d'inflació interanual d'un determinat país durant l'any 2007 expressada en punts percentuals, $i(t)$, es pot aproximar mitjançant la funció:

$$i(t) = \frac{t^2 - 10t + 9}{40} + 3, \quad 1 \leq t \leq 12,$$

en què t és el temps en mesos des del començament de l'any i $t=1$ és el mes de gener.

- Trobeu en quins mesos la taxa d'inflació interanual se situa en 3 punts percentuals [1 punt]
- Trobeu en quins mesos la taxa d'inflació és decreixent i en quins és creixent [0.5 punts]
- Trobeu en quin mes la taxa d'inflació assoleix el valor mínim i calculeu aquest valor [0.5 punts]
- Feu un esbós de la gràfica d'aquesta funció. [1 punt]
- Trobeu en quin mes la taxa d'inflació assoleix el valor màxim i calculeu aquest valor [1 punt]

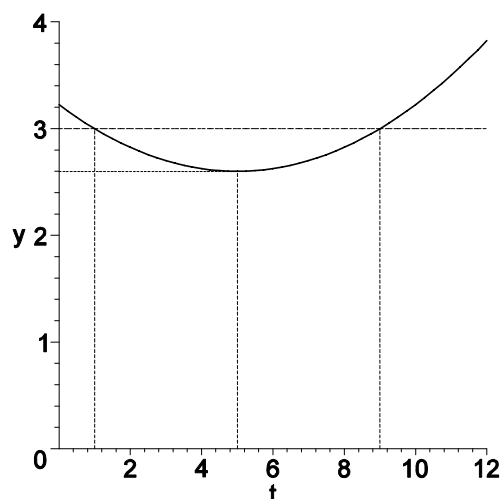
Solució:

a) Planteig: $\frac{t^2 - 10t + 9}{40} + 3 = 3$. Així doncs $t^2 - 10t + 9 = 0$, obtenint-ne dues solucions $t = 1$ i $t = 9$ (gener i setembre).

b) Creixement i decreixement: $i'(t) = \frac{2t - 10}{40}$, que és positiu si $t > 5$ i negatiu si $t < 5$. Per tant **creix en l'interval** $t > 5$ (juny, juliol, agost, setembre octubre novembre, desembre) i **decreix en l'interval** $t < 5$ (gener, febrer, març, abril).

c) El mínim és per $t = 5$ (maig) i la inflació és $i(5) = 2,6\%$.

d) Gràfica:



e) El valor màxim absolut s'obté el mes de desembre i val $i(12) = \frac{153}{40} = 3,825\%$.