

SÈRIE 4

QÜESTIONS

1. Considereu el sistema d'inequacions següent:

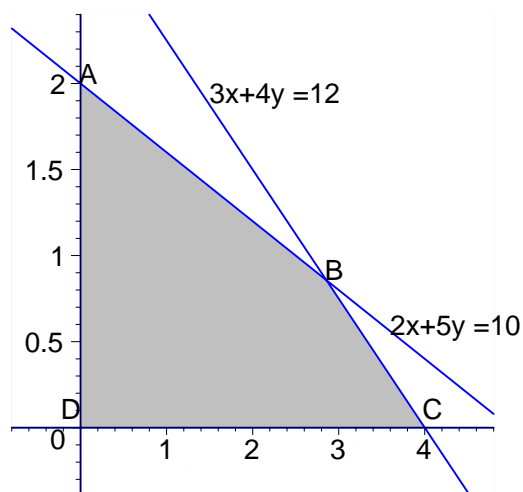
$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 2x + 5y \leq 10 \\ 3x + 4y \leq 12 \end{cases}$$

a) Dibuixeu la regió de solucions del sistema. [1 punt]

b) Determineu el màxim de la funció $f(x, y) = x + 3y$ que està sotmesa a les restriccions anteriors. [1 punt]

Solució:

a) La regió factible ve donada pel gràfic següent:



b) La taula de valors de $f(x, y)$ en els vèrtexs és:

	A(0,2)	B(20/7,6/7)	C(4,0)	D(0,0)
$f(x, y) = x + 3y$	6	38/7	4	0
màxim				

Per tant el màxim s'obté en el punt A(0,2) i té valor 6.

2. Un botiguer compra 10 televisors i 6 equips de música. D'acord amb el preu marcat hauria de pagar 10480 €. Com que paga al comptat, li fan un descompte del 5% en cada televisor i del 10% en cada equip de música, i només ha de pagar 9842 €. Quin és el preu marcat de cada televisor i de cada equip de música? [2 punts]

Solució: Siguin x i y els preus marcats dels televisors i equips de música, respectivament.

Traduint les condicions a equacions tenim:

$$\left. \begin{array}{l} 10x+6y = 10480 \\ 10 \cdot 0.95x+6 \cdot 0.9y = 9842 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 10x+6y = 10480 \\ 9.5x+5.4y = 9842 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x+3y = 5240 \\ 5x+6y = 6380 \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x+3y = 5240 \\ 0x+3y = 1140 \end{array} \right\}$$

D'on resulta $y = 380$ i $x = 820$.

3. Segons un estudi sobre l'evolució de la població d'una espècie protegida determinada, podem establir el nombre d'individus d'aquesta espècie durant els propers anys mitjançant la funció

$$f(t) = \frac{50t+500}{t+1}$$

En què t és el nombre d'anys transcorreguts.

- Calculeu la població actual i la prevista d'aquí a 9 anys. [0.5 punts]
- Determineu els períodes en què la població augmentarà i els períodes en que disminuirà. [1 punt]
- Esbrineu si, segons aquesta previsió, la població tendirà a estabilitzar-se en algun valor i, si escau, determineu-lo. [0.5 punts]

Solució:

- La població actual és de $f(0) = 500$ individus, i la prevista per d'aquí a 9 anys és de $f(9) = 95$ individus.
- La derivada de $f(t) = \frac{50t+500}{t+1}$ és $f'(t) = -\frac{450}{(t+1)^2}$ que és negativa per a tot t ; per tant la funció és decreixent i la població disminueix contínuament.
- Com que el límit de $f(t)$ quan $t \rightarrow \infty$ és 50, la població tendirà a estabilitzar-se en 50 individus.

4. Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + 3z = 3 \\ -x + y + 2z = 1 \\ 7x - 10y + z = a \end{array} \right\}$$

- a) Digueu per a quins valors del paràmetre a el sistema és incompatible. [1 punt]
- b) Resoleu el sistema per al valor de a per al qual el sistema és compatible i trobeu-ne una solució entera. [1 punt]

Solució: Resolent per Gauss tenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & -10 & 1 & a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & -20 & a-21 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array} \right)$$

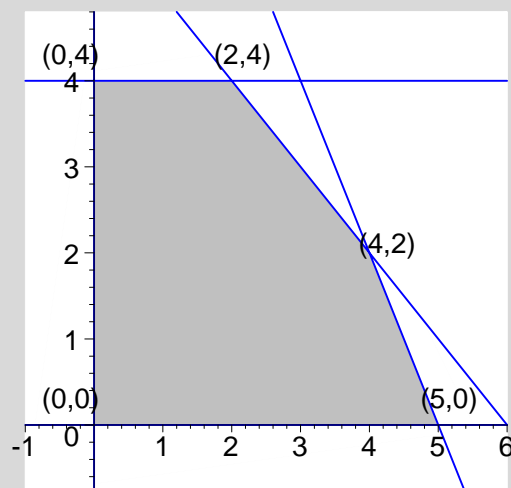
- a) Per tant, el sistema és incompatible per $a \neq 5$.
- b) Per $a = 5$ el sistema resultant és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \end{array} \right).$$

La solució general és $y = -4 + 5z$, $x = 3 - 3z + 2y = -5 + 7z$. Per a qualsevol valor enter de z s'obté una solució (x, y, z) entera. Per exemple, per a $z = 1$ obtenim la solució entera positiva: $(x, y, z) = (2, 1, 1)$.

PROBLEMES

5. La figura següent representa la regió de solucions d'un sistema d'inequacions lineals



- a) Trobeu el sistema d'inequacions que determina aquesta regió. [1 punt]
- b) Determineu el valor màxim de la funció $f_1(x, y) = x + y + 1$ en aquesta regió, i digueu en quins punts s'assoleix aquest màxim. [1 punt]
- c) Trobeu el valor de a perquè la funció $f_2(x, y) = ax + 2y + 3$ assolixi el màxim en el segment comprès entre els extrems $(4,2)$ i $(5,0)$. [1 punt]
- d) Determineu els valors de a per als quals la funció $f_2(x, y) = ax + 2y + 3$ assolixi el màxim només en el punt $(4,2)$. [1 punt]

Solució:

a) Sistema d'inequacions:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0, \\ 0 \leq y \leq 4, \\ x + y \leq 6, \\ 2x + y \leq 10. \end{array} \right\}$$

b) Determinem els valors de la funció en els vèrtexs.

	A(0,4)	B(2,4)	C(4,2)	D(5,0)	E(0,0)
$f_1(x, y) = x + y + 1$	5	7	7	6	1
		màxim	màxim		

Per tant el màxim s'obté en tot el segment BC.

c) Determinem els valors de la funció en els vèrtexs.

	A(0,4)	B(2,4)	C(4,2)	D(5,0)	E(0,0)
$f_2(x, y) = ax + 2y + 3$	11	2a+11	4a+7	5a+3	3

Cal que $4a + 7 = 5a + 3$ i per tant, $a = 4$. Verifiquem que es tracta d'un màxim:

	A(0,4)	B(2,4)	C(4,2)	D(5,0)	E(0,0)
$f_2(x, y) = 4x + 2y + 3$	11	19	23	23	3
			màxim	màxim	

d) Cal que,

$$\left. \begin{array}{l} 4a + 7 > 5a + 3 \\ 4a + 7 > 2a + 11 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} a < 4 \\ a > 2 \end{array} \right\} \rightarrow 2 < a < 4.$$

6. El preu de cost d'una unitat d'un cert producte és de 120 €. Si es ven a 150 € la unitat, el compren 500 clients. Per cada 10 € d'augment en el preu, les vendes disminueixen en 20 clients.

- Trobeu una fórmula mitjançant la qual obtinguem els beneficis. [2 punts]
- Calculeu a quin preu p per unitat hem de vendre el producte per a obtenir un benefici màxim. [1 punt]
- En el cas anterior, trobeu el nombre d'unitats que es venen i calculeu el benefici màxim. [1 punt]

Solució:

Si es donen els beneficis en termes del preu p la solució és:

- a) Sigui $c(p)$ el nombre de compradors en funció de p . Tindrem:

$$c(p) = 500 - 2(p - 150) \text{ i } b(p) = c(p)(p - 120) = -2p^2 + 1040p - 96000.$$

- b) Per trobar el màxim de la paràbola fem la derivada i igualem a zero:

$$b'(p) = -4p + 1040, \text{ d'on resulta } p = 260\text{€}. \text{ Es tracta d'un màxim ja que } b''(p) = -4.$$

- c) Substituint obtenim: $c(p) = 500 - 2(p - 150) = 500 - 2 \cdot 110 = 280$ i el benefici és

$$b(260) = 39200\text{€}.$$

Alternativament, es pot fer utilitzant com a paràmetre el nombre x d'augment de 10€ a partir del preu inicial de 150€. Llavors la solució és:

- a) Per un preu de $P(x) = 150 + 10x$, el nombre de compradors serà de $C(x) = 500 - 20x$. Per tant, el benefici serà de

$$B(x) = C(x)(P(x) - 120) = (500 - 20x)(150 + 10x - 120) = 200(-x^2 + 22x + 75).$$

- b) Per trobar el màxim de la paràbola fem la derivada i igualem a zero:

$$B'(x) = 200(-2x + 22), \text{ d'on resulta } x = 11 \text{ i } P = P(11) = 150 + 11 \cdot 10 = 260\text{€}. \text{ Es tracta d'un màxim ja que } B''(x) = -400.$$

- c) El nombre d'unitats que es venen és $C(11) = 500 - 20 \cdot 11 = 280$, i el benefici és

$$B(11) = 39200\text{€}.$$

SÈRIE 3

QÜESTIONS

1. a) Representeu gràficament la funció:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 \\ x-1 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ 3 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

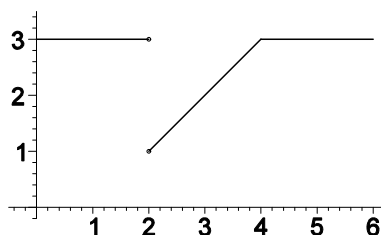
[1 punt]

b) Digueu en quins punts és discontinua i quin tipus de discontinuïtat té.

[1 punt]

Solució:

a) Gràfica:



b) La funció és contínua excepte potser en els punts $x = 2$ i $x = 4$. En aquests punts tenim:

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$ i $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 - 1 = 1$. Per tant la funció no és contínua per $x = 2$ i té una discontinuïtat de salt.

$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 4 - 1 = 3$ i $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 3$. Per tant la funció és contínua per $x = 4$.

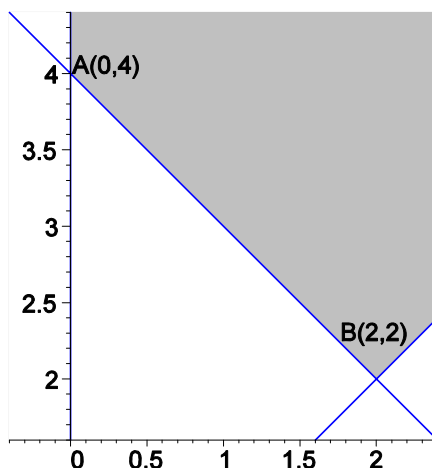
2. Considereu aquesta regió determinada pel sistema d'inequacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 4 \\ -x + y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- a) Representeu la regió. [1 punt]
 b) Esbrineu si la funció $f(x,y) = x - 3y + 6$ té màxim en aquesta regió i, si és el cas, trobeu-lo. [1 punt]

Solució:

- a) Gràfic:



- b) Sobre el costat infinit que comença en el vèrtex A(0,4), la funció $f(x,y) = x - 3y + 6$ decreix en allunyar-se del punt A, ja que la x és 0 i la y augmenta i com figura amb signe negatiu fa disminuir el total. Sobre el costat infinit que comença a B(2,2) la x creix, però la y creix tres vegades més, i com que té signe negatiu, fa disminuir el total. Per tant, el valor màxim de $f(x,y)$ s'ha d'assolir en algun punt del segment AB. Com $f(A) = f(0,4) = -6$, i $f(B) = f(2,2) = 2$, resulta que el màxim de la funció s'obté en el punt B(2,2) i pren el valor $f(2,2) = 2$.

3. L'evolució de la població d'un estat, en milions d'habitants, es pot aproximar per la funció

$$P(t) = \frac{20t}{4+t^2} + 40,$$

on t és el temps en anys.

- a) Calculeu la població actual (per a $t = 0$). [0.5 punts]
 b) Determineu el límit de $P(t)$ quan t tendeix a infinit. [0.5 punts]
 c) Determineu al cap de quants anys la població serà màxima i quants habitants prediu la funció per aquest màxim. [1 punt]

Solució:

a) $P(0) = 40$.

b) $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 40$.

c) Hem de determinar els extrems relatius. La funció derivada és:

$$P'(t) = \frac{20(4+t^2) - 20t(2t)}{(4+t^2)^2} = \frac{20(4-t^2)}{(4+t^2)^2}$$

Per tant els extrems relatius s'obtenen quan $4-t^2=0$, és a dir, per $t=-2$ i per $t=2$. Només ens interessa el segon on $P(2) = 45 > 40$. Per tant es tracta d'un màxim i serà $P(2) = 45$.

4. Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ px + 2y = -2 \end{cases}$$

a) Discuti el sistema segons els valors del paràmetre p .

[1 punt]

b) Resoleu-lo per a $p = 5$.

[1 punt]

Solució:

a) Resolent per Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ p & 2 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-p & -2-p \end{array} \right)$$

Per tant, si $p = 2$ és incompatible i altrament és compatible determinat.

b) Per $p = 5$ la matriu esdevé:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -7 \end{array} \right)$$

I per tant la solució és $y = \frac{7}{3}, x = -\frac{4}{3}$.

PROBLEMES

5. Un agricultor disposa d'un camp on plantarà patates i pastanagues. Les patates per plantar costen 1,5 €/kg, i les pastanagues, 1,75 €/kg. La quantitat de patates plantades no pot superar el doble de la quantitat de pastanagues i tampoc no pot ser inferior a la meitat de les pastanagues plantades. La despesa que aquest agricultor ha de fer per plantar les patates i les pastanagues no pot superar els 150 €. Per cada kilogram que planta obté un benefici, després de venda, de 20 €/kg per les patates i de 50 €/kg per les pastanagues. Determineu quines quantitats de cada producte ha de sembrar per tal que el benefici després de la venda al mercat sigui màxim. [4 punts]

Solució:

Inequacions:

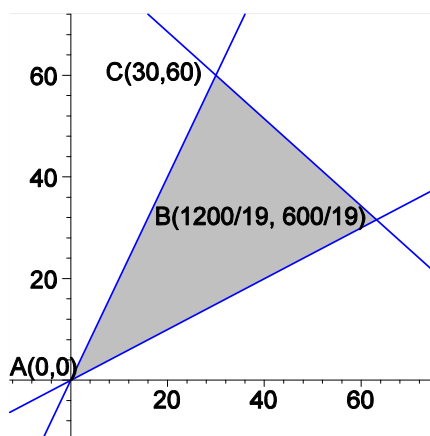
Anomenant x als kg de patates que sembra i y als de pastanagues, la despesa inicial és: $1,5x + 1,75y$ € que han de ser menor o igual que 150 €. Per altra banda tenim que $x \leq 2y$ i $x \geq \frac{y}{2}$. La funció que dona els beneficis és $B(x, y) = 20x + 50y$. Simplificant, el sistema d'inequacions és:

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 2y \\ 2x \geq y \\ 1,5x + 1,75y \leq 150 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 2y \leq 0 \\ 2x - y \geq 0 \\ 6x + 7y \leq 600 \end{array} \right\}$$

Vèrtexs:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ 6x + 7y = 600 \end{array} \right\} \rightarrow B\left(\frac{1200}{19}, \frac{600}{19}\right), \quad \left. \begin{array}{l} 2x - y = 0 \\ 6x + 7y = 600 \end{array} \right\} \rightarrow C(30, 60), \quad A(0, 0).$$

Gràfic:



Valors:

	$A(0,0)$	$B\left(\frac{1200}{19}, \frac{600}{19}\right)$	$C(30,60)$
$B(x,y) = 20x + 50y$	0	$\frac{54000}{19} = 2842,11$	3600

Per tant el benefici màxim s'obté plantant 30 kg de patates i 60 kg de pastanagues i és de 3600 €

6. Fa un any, una persona va invertir 12000 € en accions de tres empreses, que anomenarem A, B i C. Ara, les accions de l'empresa A han augmentat de valor en un 25%, les de l'empresa B han augmentat en un 10% i, en canvi, les de l'empresa C han perdut un 15% del seu valor. Si ara vengués totes les accions, no obtindria ni pèrdues ni beneficis. Sabent que va invertir en les accions de l'empresa C el mateix que en les altres dues juntes, calculeu la quantitat de diners que va invertir en accions de cada empresa. [4 punts]

Solució:

Anomenant x, y, z les quantitats invertides en les respectives accions A,B,C, les condicions són:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 12000 \\ 0,25x + 0,1y - 0,15z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 12000 \\ 5x + 2y - 3z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right\}$$

Resolent per Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12000 \\ 5 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12000 \\ 0 & -3 & -8 & -60000 \\ 0 & 0 & -2 & -12000 \end{array} \right),$$

D'on resulta $z = 6000$ €, $y = 4000$ €, $x = 2000$ €.

Alternativament, de la primera i tercera equació s'obté directament $z = 6000$, i el sistema llavors és molt més senzill.