

SÈRIE 2

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar qualsevol decimal i després arrodonir la suma total. Podeu matisar la nota de cada pregunta amb signes + i –, de manera a compensar els matisos entre totes les preguntes.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Valoreu totes les parts de cada subapartat que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.
- Copieu la nota de la pregunta i en la casella i , a fi de poder fer estadístiques sobre cada qüestió.

QÜESTIONS

1. a) Discuti el sistema següent segons els valors del paràmetre a :

$$\left. \begin{array}{l} x + (a+1)y = 1 \\ ax + 2y = -2 \end{array} \right\}$$

b) Resoleu-lo per al valor de a que el fa indeterminat.

Puntuació: Apartat a) 1 punt si troben els tres casos; 0.5 punts si els classifiquen tots tres bé; Apartat b) 0.5 punts. Total 2 punts.

Solució: Discutim per Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a+1 & 1 \\ a & 2 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 2-a^2-a & -2-a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a+1 & 1 \\ 0 & (a-1)(a+2) & a+2 \end{array} \right)$$

Si $a = 1$ el sistema és incompatible.

Si $a = -2$ la darrera línia es fa tota zero i desapareix. El sistema esdevé compatible indeterminat. La solució és: $y = y$; $x = 1 + y$.

Si $a \neq 1$ i $a \neq -2$ el sistema és Cramer compatible i determinat.

En aquest cas, la solució (que no es demana) és:

$$y = \frac{a+2}{(a-1)(a+2)} = \frac{1}{a-1}$$

$$x = 1 - \frac{a+1}{a-1} = \frac{a-1-a-1}{a-1} = \frac{-2}{a-1}$$

2. Considereu la funció definida a trossos següent:

$$f(x) = \begin{cases} -4x + a & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 - 5 & \text{si } -2 < x < 1 \\ bx + 3 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

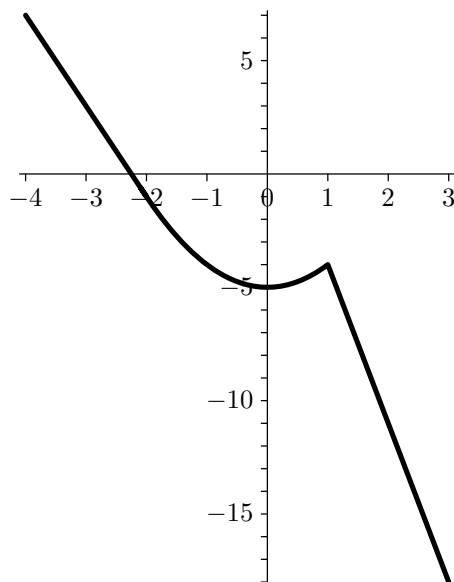
- a) Calculeu els valors de a i de b per tal que $f(x)$ sigui contínua per a tot x .
b) Feu un gràfic de la funció obtinguda en l'apartat anterior.

Puntuació: Cada apartat 1 punt. Total: 2 punts.

Solució: a) Perquè sigui contínua els límits per l'esquerra i per la dreta en els punts $x = -2$ i $x = 1$ han de ser iguals. Per tant:

$$\left. \begin{array}{l} 8 + a = -1 \\ -4 = b + 3 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} a = -9 \\ b = -7 \end{array} \right\} \text{ i la funció serà: } f(x) = \begin{cases} -4x - 9 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 - 5 & \text{si } -2 < x < 1 \\ -7x + 3 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

b) Per $x \leq -2$ és una recta de pendent -4 i per $x = -2$ té el valor $f(x) = -1$. Per $-2 < x < 1$ és una paràbola de vèrtex a $x = 0$ i per $x \geq 1$ és una recta de pendent -7 que per $x = 1$ té el valor $f(x) = -4$. A més, per construcció és contínua. Per tant la gràfica és:



3. Considereu el sistema d'inequacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} x+2y \leq 8 \\ x+y \geq 5 \\ x-5y \leq 0 \end{array} \right\}$$

- a) Resoleu-lo gràficament.
b) Trobeu-ne totes les solucions enteres.

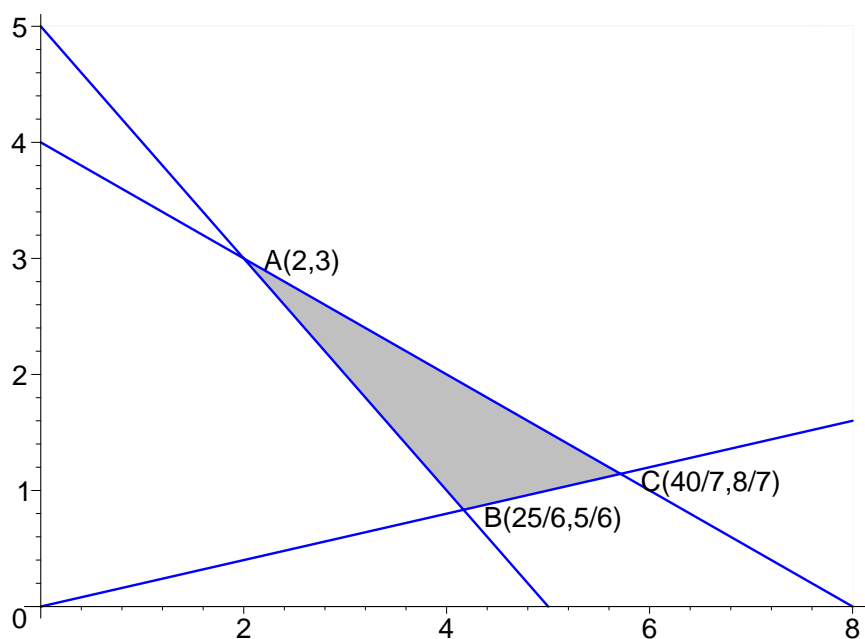
Puntuació: Apartat 1: 0,25 punts per cada vèrtex i 0,25 punts pel gràfic; total 1 punt. Apartat 2: 0,2 punts per cada solució entera correcta; total 1 punt. Total 2 punts.

Solució: Els punts d'intersecció dels costats són:

$$A: \left\{ \begin{array}{l} x+2y = 8 \\ x+y = 5 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} y=3 \\ x=2 \end{array} \right\} \quad B: \left\{ \begin{array}{l} x+y = 5 \\ x-5y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = \frac{5}{6} \\ x = \frac{25}{6} \end{array} \right\}$$

$$C: \left\{ \begin{array}{l} x+2y = 8 \\ x-5y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = \frac{8}{7} \\ x = \frac{40}{7} \end{array} \right\}.$$

El gràfic de la regió factible és:



b) Per determinar les solucions enteres fixem el mínim valor enter de y factible que és $y = 1$ i posem les condicions sobre les x . Resulten:

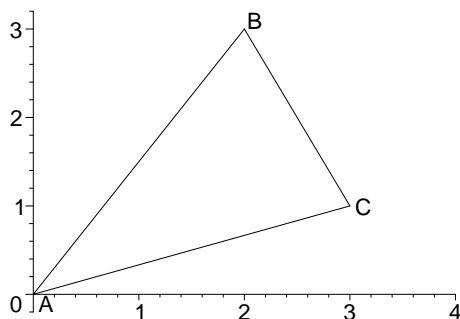
$$y = 1 \left. \begin{array}{l} x \leq 6 \\ x \geq 4 \\ x \leq 5 \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{(4,1)} \text{ i } \boxed{(5,1)}; \quad y = 2 \left. \begin{array}{l} x \leq 4 \\ x \geq 3 \\ x \leq 10 \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{(3,2)} \text{ i } \boxed{(4,2)};$$

$$y = 3 \left. \begin{array}{l} x \leq 2 \\ x \geq 2 \\ x \leq 15 \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{(2,3)}. \text{ Aquestes són les úniques solucions enteres.}$$

4. Trobeu un sistema d'inequacions que tingui com a conjunt de solucions l'interior i els costats del triangle del pla de vèrtexs $(0,0)$, $(2,3)$ i $(3,1)$.

Puntuació: 1 punt per trobar correctament les equacions dels costats; 1 punt per trobar les inequacions. Total: 2 punts.

Solució: Posem $A(0,0)$, $B(2,3)$ i $C(3,1)$. El triangle és:



Les condicions seran

$$\text{Costat } AB; \quad y \leq \frac{3}{2}x; \quad 2y - 3x \leq 0.$$

$$\text{Costat } BC; \quad y - 1 \leq -2(x - 3); \quad 2x + y \leq 7.$$

$$\text{Costat } CA; \quad y \geq \frac{1}{3}x \quad 3y - x \geq 0.$$

PROBLEMES

5. Els beneficis mensuals d'un artesà expressats en euros, quan fabrica i ven x objectes, s'ajusten a la funció $B(x) = -0.5x^2 + 50x - 800$, en què $20 \leq x \leq 60$.

a) Trobeu el benefici que obté en fabricar i vendre 20 objectes i en fabricar i vendre 60 objectes.

b) Trobeu el nombre d'objectes que ha de fabricar i vendre per a obtenir el benefici màxim, així com aquest benefici màxim.

c) Feu un esbós del gràfic de la funció $B(x)$.

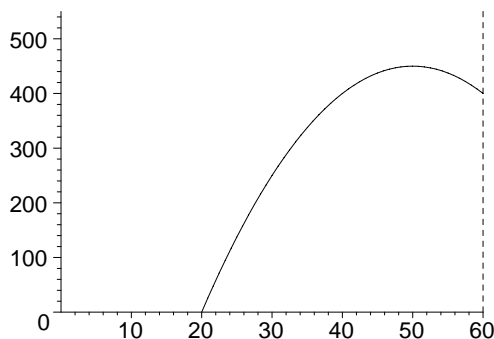
d) El benefici mitjà per x objectes és $M(x) = \frac{B(x)}{x}$. Digueu quants objectes ha de fabricar i vendre perquè el benefici mitjà sigui màxim, i quin és aquest benefici.

Puntuació: 1 punt per cada apartat. Total: 4 punts.

Solució: a) $B(20) = 0 \text{ €}$. $B(60) = 400 \text{ €}$.

b) Trobem els extrems relatius igualant la derivada a 0. $B'(x) = -x + 50$. Per tant s'obté per $x = 50$ i el seu valor és $B(50) = 450 \text{ €}$, que òbviament és el màxim absolut a l'interval $20 \leq x \leq 60$.

c) El gràfic és:



d) El benefici mitjà ve donat per $M(x) = \frac{B(x)}{x} = -0.5x + 50 - \frac{800}{x}$. Per tant la derivada

és: $M'(x) = -0.5 + \frac{800}{x^2}$. Igualant a zero resulta $x = \pm 40$, i l'única solució dins de

l'interval és $x = 40$ i té per valor $M(40) = -20 + 50 - 20 = 10$. Per tant ha de vendre 40 objectes i obtindrà un benefici mitjà de 10 €.

6. Un taller de confecció fa jaquetes i pantalons per a criatures. Per fer una jaqueta necessiten 1m de roba i dos botons, i per a fer uns pantalons calen 2m de roba, 1 botó i 1 cremallera. El taller disposa de 500 m de roba, 400 botons i 225 cremalleres. El benefici que obté per la venda d'una jaqueta és de 20 € i per la d'uns pantalons és de 30 €. Suposant que es ven tot el que es fabrica:

a) Calculeu el nombre de jaquetes i de pantalons que s'han de fer per tal d'obtenir un benefici màxim. Determineu també aquest benefici màxim.

b) Si el material sobrant es ven a 1 € el metre de roba, a 0,20 € cada cremallera i a 0,01 € cada botó, calculeu quant es pot obtenir de la venda del que ha sobrat.

Puntuació: a) 1 punt per les inequacions; 1 punt per la gràfica i els vèrtexs; 1 punt per trobar el màxim; b) 1 punt. Total: 4 punts.

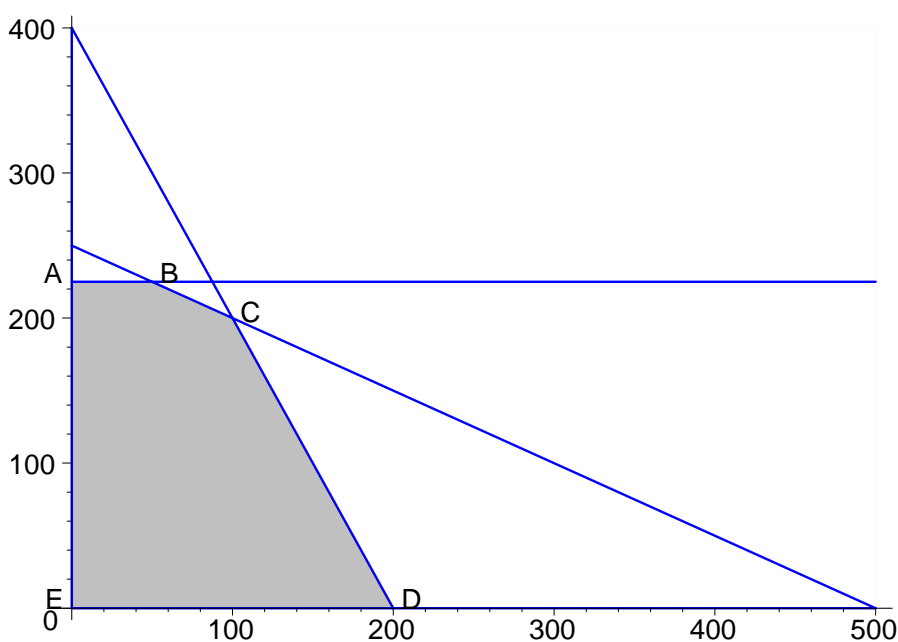
Solució: a) Anomenem x i y a les quantitats de jaquetes i pantalons que fa. Les condicions es poden resumir en la taula següent:

		roba	botons	cremalleres
jaquetes	x	1	2	0
pantalons	y	2	1	1
Total		500	400	225

Per tant les condicions són:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 500 \\ 2x + y \leq 400 \\ y \leq 225 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

i la gràfica corresponent és:



Els vèrtexs de la regió factible són:

$$A: \begin{cases} y = 225 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow A(0, 225); \quad B: \begin{cases} y = 225 \\ x + 2y = 500 \end{cases} \rightarrow B(50, 225);$$

$$C: \begin{cases} x + 2y = 500 \\ 2x + y = 400 \end{cases} \rightarrow C(100, 200); \quad D: \begin{cases} y = 0 \\ 2x + y = 400 \end{cases} \rightarrow D(200, 0).$$

La funció benefici a maximitzar és: $f(x, y) = 20x + 30y$. Tenim:

	A(0,225)	B(50,225)	C(100,200)	D(200,0)	E(0,0)
$f(x, y) = 20x + 30y$	6750	7750	8000	4000	0
			màxim		

Per tant el benefici màxim és 8000 € i s'obté fent 100 jaquetes i 200 pantalons.

b) Si es fabriquen les quantitats anteriors, el sobrant és

roba	$500 - 1 \cdot 100 - 2 \cdot 200 = 0$
botons	$400 - 2 \cdot 100 - 1 \cdot 200 = 0$
cremalleres	$225 - 0 \cdot 100 - 1 \cdot 200 = 25$

El benefici marginal és doncs de $25 \cdot 0,20 \text{€} = 5 \text{€}$.

SÈRIE 1

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar qualsevol decimal i després arrodonir la suma total. Podeu matisar la nota de cada pregunta amb signes + i –, de manera a compensar els matisos entre totes les preguntes.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Valoreu totes les parts de cada subapartat que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0.25 o 0.5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0.75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.
- Copieu la nota de la pregunta i en la casella i , a fi de poder fer estadístiques sobre cada qüestió.

QÜESTIONS

1. Trobeu el màxim de la funció $f(x, y) = 5x + y - 13$ en la regió tancada definida pel triangle de vèrtexs $A=(2,4)$, $B=(6,8)$ i $C=(7,3)$, així com el punt o els punts on s'obté aquest màxim.

Puntuació: Càlcul dels valors de la funció en els tres vèrtex: 1 punt; resposta correcte de que el màxim és 25 i s'obté sobre tot el costat BC: 1 punt. Total: 2 punts.

Solució: El màxim s'obté sobre la frontera de la regió factible tancada. Tenim:

$$f(A) = f(2,4) = 1, \quad f(B) = f(6,8) = 25, \quad f(C) = f(7,3) = 25$$

Per tant, el màxim val 25 i s'obté sobre en tot el segment BC.

2. Una companyia aèria de baix cost realitza vols des de Girona a 3 ciutats A, B i C. Calculeu el preu dels bitllets a cada ciutat amb la informació següent: Si ven 10 bitllets a la ciutat A, 15 a la B i cap a la C ingressa 925 €, si ven 12 bitllets per A, 8 per B i cap per C ingressa 760 €, si ven 6 bitllets per A, 5 per B i 8 per C ingressa 855 €.

Puntuació: 1 punt pel plantejament; 1 per la solució. Total: 2 punts.

Solució: Plantegem el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 10A + 15B = 925 \\ 12A + 8B = 760 \\ 6A + 5B + 8C = 855 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2A + 3B = 185 \\ 3A + 8B = 190 \\ 6A + 5B + 8C = 855 \end{array} \right\}$$

De les dues primeres obtenim $A = 40$ i $B = 35$. Substituint en la tercera resulta $C = 55$.

3. En un taller fabriquen dos tipus de bosses. Per fer una bossa del primer model es necessiten 0.9 m^2 de cuir i 8 hores de feina. El segon model necessita 1.2 m^2 de cuir i 4 hores de feina. Per fer aquests dos tipus de bosses el taller disposa de 60 m^2 de cuir i pot dedicar-hi un màxim de 400 hores de feina.

- Expresseu mitjançant un sistema d'inequacions les restriccions a les que està sotmesa la producció d'aquests dos models de bosses.
- Representeu la regió solució d'aquest sistema i trobeu-ne els vèrtexs.

Puntuació: Cada apartat 1 punt. Total 2 punts.

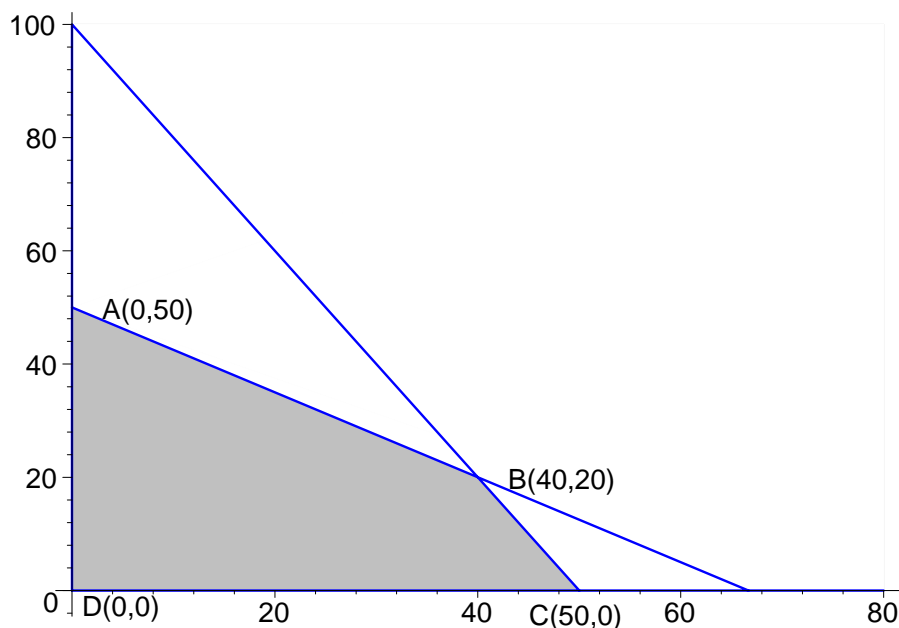
Solució: Anomenant respectivament x i y als nombres de bosses dels models 1 i 2, les condicions poden resumir-se en la taula següent:

Nombre bosses	Cuir (m^2)	Feina (h)
x	0.9	8
y	1.2	4
Màxim	60	400

a) El sistema d'inequacions corresponent és:

$$\left. \begin{array}{l} 0.9x + 1.2y \leq 60 \\ 8x + 4y \leq 400 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 4y \leq 200 \\ 2x + y \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

b) Representem gràficament la regió factible:



El punt A s'obté de $x = 0$ i $3x + 4y = 200$ i és $A(0,50)$.

El punt B s'obté com a solució del sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 3x+4y = 200 \\ 2x+y = 100 \end{array} \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 200 \\ 2 & 1 & 100 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 100 \\ 0 & \frac{5}{2} & 50 \end{array} \right) \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 20 \\ x = 40 \end{array} \right\}$$

El punt C s'obté de $y = 0$ i $2x + y = 100$ i és $C(50,0)$. Finalment tenim $D(0,0)$.

4. La funció $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ té un extrem relatiu en el punt $(1,4)$ i passa pel punt $(3,0)$. Trobeu a, b, c .

Puntuació: Plantejament 1 punt; solució 1 punt. Total 2 punts.

Solució: a) La funció derivada és $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. L'extrem relatiu en el punt $(1,4)$ dóna dues condicions: passa pel punt i per tant $a + b + c = 4$, i la derivada val 0 i per tant $3a + 2b + c = 0$. Com que també passa pel punt $(3,0)$ resulta $27a + 9b + 3c = 0$, i simplificant-la $9a + 3b + c = 0$. Escrivim la matriu ampliada del sistema i reduïm per Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -12 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & 4 & 36 \end{array} \right)$$

d'on obtenim

$$\begin{cases} c = 9 \\ b = 12 - 18 = -6 \\ a = 4 - 9 + 6 = 1. \end{cases}$$

La funció és doncs, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Nota: La funció derivada és $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ i la derivada segona és $f''(x) = 6x - 12$. Per tant $f(1) = 4$, $f'(1) = 0$ i $f''(1) = -6$. Per tant, la funció té un màxim en el punt $(1,4)$.

PROBLEMES

5. Considereu la funció real de variable real

$$f(x) = \frac{2x+m}{x}$$

on m és un paràmetre real.

a) Calculeu el valor de m per tal que la tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = -3$ sigui paral·lela a la recta $x - 3y + 1 = 0$. Calculeu també l'equació d'aquesta tangent.

Ara fixeu el valor de $m = 1$.

- b) Doneu el domini de la funció i els intervals on és creixent o decreixent.
- c) Determineu les asímptotes.
- d) Feu un esbós de la gràfica.

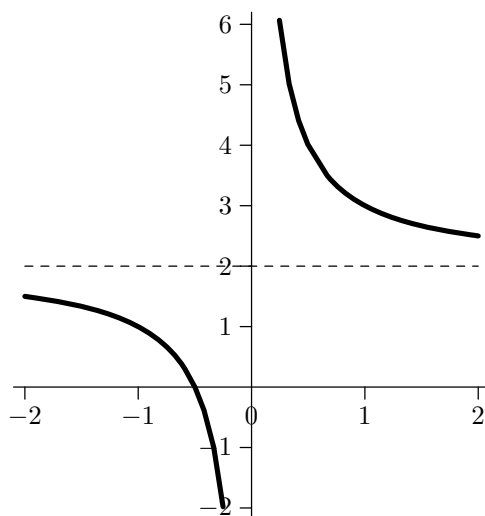
Puntuació: Cada apartat 1 punt. Total 2 punts.

Solució: a) Calculem la funció derivada: $f(x) = 2 + \frac{m}{x}$, $f'(x) = -\frac{m}{x^2}$, i el seu valor per $x = -3$ que ha de ser igual al pendent de la recta: $f'(-3) = -\frac{m}{9} = \frac{1}{3}$. D'on resulta

$m = -3$. La funció serà: $f(x) = 2 - \frac{3}{x}$, i el valor de la funció per $x = -3$ és

$f(-3) = 2 - \frac{3}{-3} = 3$. Per tant, la recta tangent és: $y = 3 + \frac{1}{3}(x+3)$, o també: $x - 3y + 12 = 0$.

- b) Ara la funció és $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$. El domini és tot els reals excepte el zero, i la derivada és $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ que és negativa en tot el domini. Per tant la funció és decreixent en tot el domini.
- c) Té una asímptota vertical $x = 0$ on s'anul·la el denominador. El límit de $f(x)$ per $x \rightarrow \infty$ és 2. Per tant té una asímptota horitzontal $y = 2$.
- d) Tenint en compte que per $x > 0$ la funció $f(x)$ és positiva, el gràfic de la funció és per tant:



6. Tres entitats financeres A B y C ofereixen respectivament, per a dipòsits superiors a 2000 €, un interès anual del 2%, 3% i k % (que no coneixem). La Joana, en Manel i el Dani decideixen invertir els seus estalvis en aquestes entitats durant un any. Sabem que si tots ho fessin a l'entitat A obtindrien en total uns beneficis de 164 €, però si la Joana optés per A, en Manel per C i en Dani per B n'obtindrien 192 €, finalment, si la Joana i en Manel es decidissin per B i el Dani per C n'obtindrien 218 €.

- Escriu un sistema d'equacions que descriu la situació.
- Sense resoldre el sistema, determineu la quantitat total de diners invertida entre les tres persones.
- Trobeu, si existeix, un valor de k per al qual hi hagi infinites solucions. Resoleu el sistema per aquest valor de k , i doneu-ne tres solucions diferents.

Puntuació: Apartat a) 1 punt; apartat b) 0.5 punts; apartat c) 1 punt per determinar $k=3$ i $k=2$; 1 punt per donar la solució general per $k=2$; 0.5 per donar tres solucions diferents. Total 4 punts.

Solució: a) Sistema d'equacions:

$$\left. \begin{array}{l} 0.02(x+y+z) = 164 \\ 0.02x + \frac{ky}{100} + 0.03z = 192 \\ 0.03(x+y) + \frac{kz}{100} = 218 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y+z = 8200 \\ 2x+ky+3z = 19200 \\ 3x+3y+kz = 21800 \end{array} \right\}$$

b) La primera equació dóna directament que la quantitat total invertida pels tres és 8200 €

c) Resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 8200 \\ 2 & k & 3 & | & 19200 \\ 3 & 3 & k & | & 21800 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 8200 \\ 0 & k-2 & 1 & | & 2800 \\ 0 & 0 & k-3 & | & -2800 \end{pmatrix}$$

Si $k = 3$ el sistema és incompatible. Si $k = 2$ resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 8200 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2800 \\ 0 & 0 & -1 & | & -2800 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 8200 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2800 \end{pmatrix}$$

que correspon a la solució general:

$$\left. \begin{array}{l} z = 2800 \\ y = y \\ x = 5400 - y \end{array} \right\}$$

Podem donar fàcilment tres solucions diferents, per exemple:

x	2400	2900	3400
y	3000	2500	2000
z	2800	2800	2800

Nota pels correctors: Les tres solucions han de tenir $x \geq 2000$ i $y \geq 2000$ per verificar les condicions de l'enunciat. Altrament els interessos no corresponen. Penalitzeu molt lleugerament el lapsus.