SÈRIE 4

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar qualsevol decimal i després arrodonir la suma total. Podeu matisar la nota de cada pregunta amb signes + i –, de manera a compensar els matisos entre totes les preguntes.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Valoreu totes les parts de cada subapartat que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.
- Copieu la nota de la pregunta *i* en la casella *i,* a fi de poder fer estadístiques sobre cada qüestió.

QÜESTIONS

1. En els sis primers mesos, des que van obrir, una llibreria ha anat anotant el nombre de compradors de cada mes. Aquest nombre $N(x)$ es pot ajustar per la funció $N(x)=\dfrac{1000x-600}{x}$, essent x el número del mes comptat des que van obrir.

a) Quants compradors van tenir el segon mes? En quin mes, comptat a partir de l'obertura, van tenir 900 compradors?

b) Suposem que aquesta fórmula serveix per predir el nombre de compradors en el futur. Podem assegurar que aquest nombre sempre anirà en augment? Expliqueu ben bé el perquè de la vostra resposta.

Puntuació: a) 1 punt; b) 1 punt. Total 2 punts.

Solució: a) $N(2)=\dfrac{1000\cdot 2-600}{2}=700$. Per trobar en quin mes van comprar 900 persones fem $N(x)=\dfrac{1000x-600}{x}=900$ i resolem l'equació:
$1000x-600=900x$. El resultat és $x=6$.

b) La derivada és $N'(x) = \dfrac{600}{x^2} > 0$ que sempre és positiva. Per tant el nombre de compradors sempre anirà en augment.
Tenint en compte que $\lim_{x\to\infty} N(x) = 1000$, això vol dir que la corba té una asímptota horitzontal i que el nombre de compradors tendirà a ser 1000 quan s'arribi a la saturació.

Nota pel corrector: S'entén que la única cosa que ha de contestar l'alumne són les dues primeres frases. No es demana de calcular l'asímptota i no es descomptaran punts per no donar-la sempre que es raoni correctament el creixement. Tampoc es demana cap raonament que tingui en compte que $N(x)$ és una aproximació d'una funció a valors enters.

2. Discutiu en funció del paràmetre a el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 5 \\ 5x+y-z & = & 11 \\ 3x-y+az & = & 2 \end{array}\right\}$$

Puntuació: Total 2 punts.

Solució: Reduint per Gauss resulta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -1 & 11 \\ 3 & -1 & a & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -6 & -14 \\ 0 & -4 & a-3 & -13 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & a+3 & 1 \end{array}\right).$$

Discussió:

Cas $a = -3$: Sistema incompatible.
Cas $a \neq -3$: Sistema compatible determinat.

Nota pel corrector: No es demanen les solucions, sinó únicament la discussió.

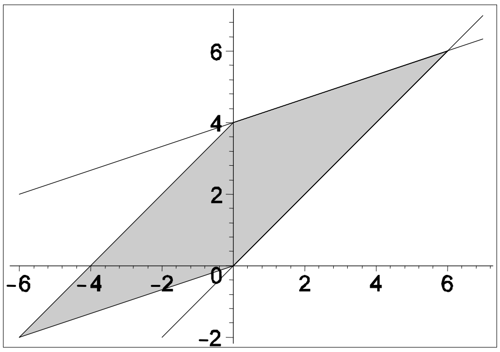
3. Afegiu inequacions al sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x \le y \\ 3y \le x+12 \end{array}\right\}$$

per tal que la regió de les solucions del sistema resultant tingui forma de paral·lelogram. Justifiqueu l'elecció que heu fet.

Puntuació: discussió 1 punt; solucions 1 punt. Total 2 punts.

Solució: La inequació corresponent al costat paral·lel oposat al costat limitat per $x \leq y$ ha de ser de la forma $x \geq y - c$ amb $c > 0$. El signe de desigualtat invertit cal per a que limiti la regió determinada per la inequació amb límit oposat, i $c > 0$ per a que hi hagi una zona on ambdues condicions siguin compatibles. Anàlogament la inequació corresponent al costat paral·lel oposat al costat limitat per $3y \leq x + 12$ serà de la forma $3y \geq x + 12 - d$ amb $d > 0$. Podem triar, per exemple $c = 4$ i $d = 12$. En aquest cas les inequacions a afegir seran $x \geq y - 4$ i $3y \geq x$. La regió factible resultant serà:



Nota pel corrector: El primer punt es valorarà per la correcció del raonament. El segon punt s'atorgarà si es donen dues rectes acceptables. Si hi ha un error en el signe de desigualtat es penalitzarà amb 0.5 punts.

4. Indiqueu TOTS els productes de dues matrius diferents que es poden fer amb les matrius següents.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$$

Puntuació: Total 2 punts.

Solució: Cal que el nombre de columnes de la primera matriu sigui igual al nombre de files de la segona, ja que es multipliquen files per columnes. Per tant, són possibles els productes següents:

$A \cdot C$, $A \cdot D$ columnes de A igual a 2 i files de la segona matriu igual a 2.
$B \cdot A$, $B \cdot C$, $B \cdot D$ columnes de B igual a 2 i files de la segona matriu igual a 2.
$C \cdot B$ columnes de C igual a 3 i files de la segona matriu igual a 3.
$D \cdot E$ columnes de D igual a 1 i files de la segona matriu igual a 1.
$E \cdot A$, $E \cdot C$, $E \cdot D$ columnes de E igual a 2 i files de la segona matriu igual a 2.

Nota pel corrector: Descompteu 0.2 punts per cada producte impossible i per cada oblit i arrodoniu al final.

PROBLEMES

5. Considereu la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}.$$

a) Estudieu la continuïtat.
b) Determineu els intervals de creixement i decreixement de la funció.
c) Feu un gràfic aproximat de la funció.
d) Trobeu els extrems relatius i absoluts en l'interval [-2 , 2].

Puntuació: cada apartat 1 punt. Total 4 punts.

Solució: a) $f(0^-) = 2$ i $f(0^+) = 2$. Per tant la funció és contínua també en el punt d'abscissa 0.

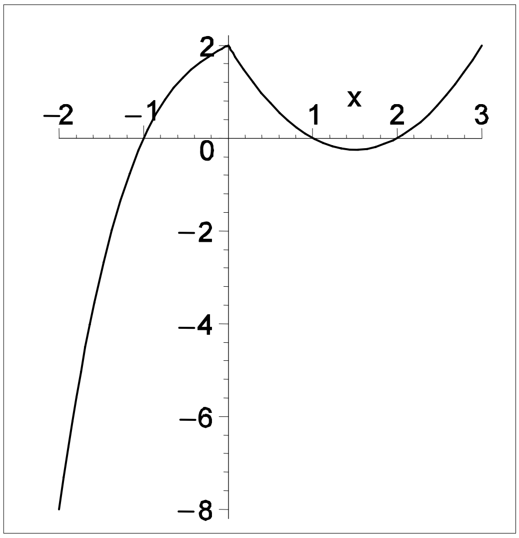
b) La derivada és:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x - 3 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Per estudiar els intervals de creixement i decreixement hem d'estudiar el seu signe

$x < 0$	$0 < x < \frac{3}{2}$	$x = \frac{3}{2}$	$x > \frac{3}{2}$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$
creix	decreix	mínim	creix

c) Per $x < 0$ la funció sempre és creixent, talla l'eix x en $x = -1$ i l'eix d'ordenades en el punt (0,2). Per $x \geq 0$ és una paràbola que talla l'eix d'abscisses en els punts $x = 1$ i $x = 2$ i l'eix d'ordenades en el punt (0,2). Per tant la gràfica té la forma següent:



d) Els extrems relatius són $(0,2)$, ja que la funció és creixent a l'esquerra i decreixent a la dreta de $x=0$ i $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$, on s'anul·la la derivada per $x>0$.

Els extrems absoluts són els extrems relatius o es prenen en el límit de l'interval. Tenint en compte que $f(-2)=-8$, $f(0)=2$, $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{4}$ i $f(2)=0$, el mínim absolut en l'interval [-2,2] és $(-2,-8)$ i el màxim absolut és $(0,2)$.

6. En un jardí municipal es volen plantar un mínim de 1200 geranis, 3200 clavells i 3000 margarides. Una empresa A ofereix un lot que conté 30 geranis, 40 clavells i 30 margarides per 15 €. Una altra empresa B ofereix un lot de 10 geranis, 40 clavells i 50 margarides per 12 €. L'Ajuntament compra x lots a l'empresa A i y lots a l'empresa B.

a) Doneu les inequacions que representen les restriccions a les que estan sotmesos els valors de x i de y per tal que compleixin les condicions de la plantació.
b) Representeu gràficament la regió del pla que satisfà les inequacions.
c) Trobeu el nombre de lots de cada tipus que fan que la despesa sigui mínima i calculeu aquesta despesa mínima.
d) Trobeu quants geranis, clavells i margarides adquireix l'Ajuntament amb la compra de preu mínim i quantes plantes i de quin tipus haurà adquirit per sobre del mínim que vol plantar.

Puntuació: cada apartat 1 punt. Total: 4 punts.

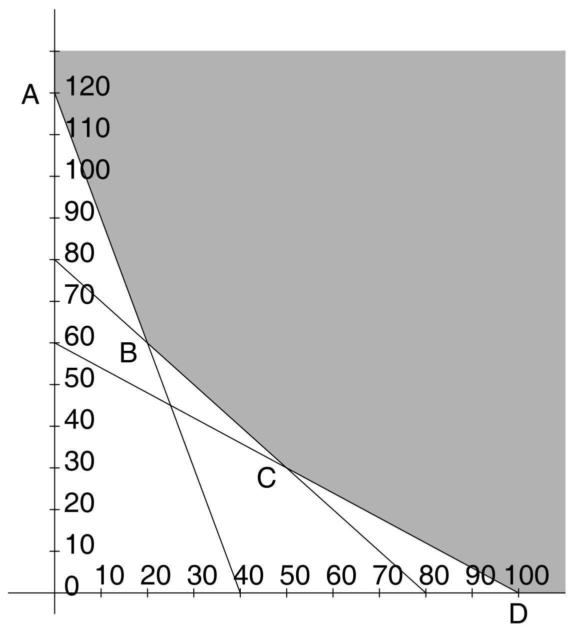
Solució Posem les dades en el quadre següent:

Lot	geranis	clavells	margarides	Preu/unitari
A	30	40	30	15
B	10	40	50	12
Mínim	1200	3200	3000	

Per tant, les restriccions són:

$$\left.\begin{array}{ccccc} x & \geq & 0 & & \\ y & \geq & 0 & & \\ 30x & + & 10y & \geq & 1200 \\ 40x & + & 40y & \geq & 3200 \\ 30x & + & 50y & \geq & 3000 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{ccccc} x & \geq & 0 & & \\ y & \geq & 0 & & \\ 3x & + & y & \geq & 120 \\ x & + & y & \geq & 80 \\ 3x & + & 5y & \geq & 300 \end{array}\right\}$$

b) La regió factible és la del gràfic següent:



c) La funció a minimitzar és $p(x,y)=15x+12y$. El punt B és la intersecció de les rectes $3x+y=120$ i $x+y=80$, que és $B=(20,60)$. El punt C és la intersecció de les dues rectes $x+y=80$ i $3x+5y=200$, i és $C=(50,30)$. Fem el quadre de valors de la funció objectiu en els vèrtexs:

	$A(0,120)$	$B(20,60)$	$C(50,30)$	$D(100,0)$
$p(x,y)=15x+12y$	1440	1020	1110	1500

Per tant, el cost mínim s'obtindrà adquirint 20 lots tipus A i 60 lots tipus B, i el cost serà de 1020 €. La funció de cost no té màxim en la regió factible, ja que no és tancada.

d) Els nombres de plantes que adquireix l'Ajuntament amb la compra de preu mínim és:

$$\begin{array}{lclcl} \text{geranis} & = & 30\cdot 20+10\cdot 60 & = & 1200 \\ \text{clavells} & = & 40\cdot 20+40\cdot 60 & = & 3200 \\ \text{margarides} & = & 30\cdot 20+50\cdot 60 & = & 3600. \end{array}$$

Per tant, únicament haurà adquirit 600 margarides a més del mínim de plantes que vol plantar.