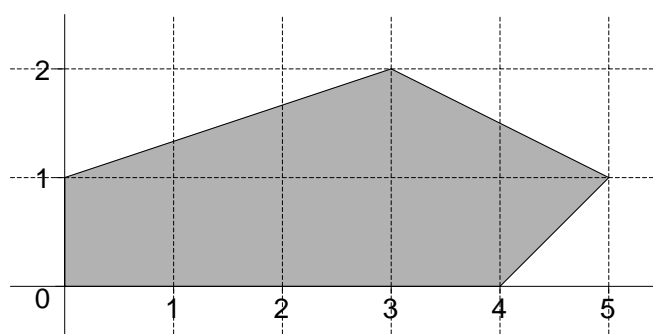


SÈRIE 5

Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals (ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar altres decimals per als diferents apartats i arrodonir després la suma). Aquestes pautes no pretenen planificar tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Hi haurà molts casos concrets, doncs, en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos en què les pautes siguin de difícil aplicació, feu prevaler sempre el vostre criteri i el sentit comú. Copieu la nota de la pregunta i en la casella i .

QÜESTIONS

1. Trobeu els punts de la regió del dibuix on la funció $f(x, y) = 2x + 4y + 5$ pren el valor màxim i digueu quin és el benefici màxim.



Puntuació: 2 punts.

Solució: El màxim s'obté en el contorn, i en particular en algun vèrtex. Els vèrtexs del contorn són $A(0,1)$, $B(3,2)$, $C(5,1)$, $D(4,0)$, $O(0,0)$. Fem el quadre de valors.

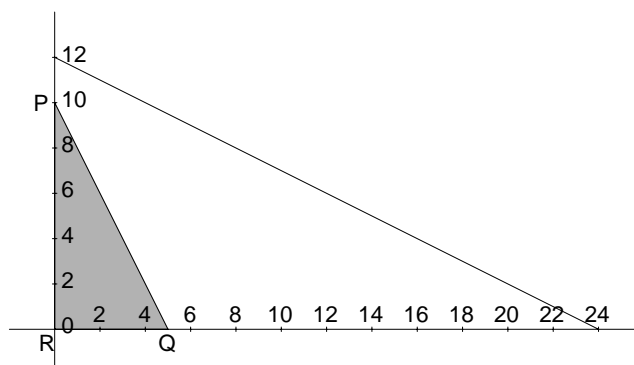
	$A(0,1)$	$B(3,2)$	$C(5,1)$	$D(4,0)$	$O(0,0)$
$f(x, y) = 2x + 4y + 5$	9	19	19	13	5

Per tant el màxim s'obté en tots els punts del segment que va de $B(3,2)$ a $C(5,1)$, i el seu valor és 19.

2. Maximitzeu la funció $f(x, y) = 2x - 3y$ amb les restriccions: $x + 2y \leq 24$, $2x + y \leq 10$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Puntuació: 2 punts. Les respostes sense raonar no puntuen.

Solució: La regió factible és:



El màxim de la funció s'obté en el contorn i en particular en algun vèrtex. Els vèrtexs són: $P(0,10)$, $Q(5,0)$, $R(0,0)$. Fem el quadre de valors:

	$P(0,10)$	$Q(5,0)$	$R(0,0)$
$f(x,y) = 2x - 3y$	-30	10	0

Per tant, el màxim s'obté en el punt $Q(5,0)$, i val 10 .

3. Tenim dues caixes de llibres A i B. Si passem 12 llibres de la caixa A a la B, totes dues caixes tindran la mateixa quantitat de llibres. Si passem 12 llibres de la B a la A, la caixa A tindrà el triple de llibres que la caixa B. Quants llibres conté cada caixa?

Puntuació: plantejament 1 punt; resolució 1 punt. Total: 2 punts.

Solució: Anomenant x al nombre de llibres de la caixa A i y al nombre de llibres de la caixa B, les condicions poden expressar-se mitjançant el sistema lineal següent:

$$\left. \begin{array}{l} x-12 = y+12 \\ x+12 = 3(y-12) \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x-y = 24 \\ x-3y = -48 \end{array} \right\} \text{ que té per solució } \boxed{A = 60, B = 36}$$

4. Discussiu, i en el seu cas resoleu, el sistema següent:

$$\begin{cases} 4x + 6y - 8z = 2 \\ 6x + 9y - 12z = 3 \\ x + 2y + z = 10 \end{cases}$$

Puntuació: 2 punts.

Solució: Eliminant pel mètode de Gauss resulta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 10 \\ 4 & 6 & -8 & 2 \\ 6 & 9 & -12 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -6 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Per tant el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat, i la solució és:

$$(x, y, z) = (-28, 19, 0) + z(11, -6, 1)$$

PROBLEMES

5. Sigui la funció $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

- Trobeu les equacions de les asímptotes de $f(x)$.
- Estudieu el signe de la funció.
- Estudieu el creixement i decreixement de la funció i indiqueu quins són els seus màxims i mínims.
- Feu un esbós de la gràfica de $f(x)$.

Puntuació: cada apartat 1 punt. Total: 4 punts.

Solució: a) Les asímptotes verticals corresponen als zeros del denominador i per tant són $x = \pm 1$. Les asímptotes horitzontals s'obtenen prenent el límit quan x tendeix a

$\pm\infty$. Per tant és: $y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 1$, o sigui $y = 1$.

b) El signe de la funció depèn del signe del denominador, ja que el numerador sempre és positiu. Per tant, tenim el quadre següent de signes de la funció:

	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
Signe de $f(x)$	+	-	+

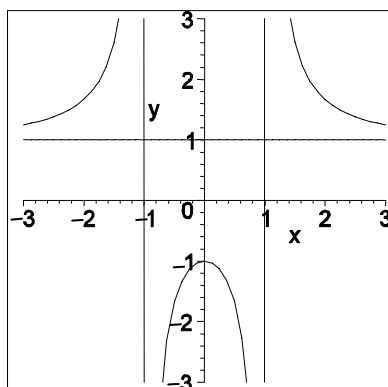
c) Pel que fa al creixement i decreixement, la derivada és

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

i el seu signe és el signe del numerador, ja que el denominador és sempre positiu en el domini. Per tant tenim el següent quadre de creixement i decreixement de la funció:

	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	□	màxim	□

d) Per tant el gràfic de la funció té la forma següent:



6. Una empresa de lloguer de cotxes ens ofereix la possibilitat d'escollir entre dues tarifes:

A: 20 € per dia més 0,2 € per quilòmetre recorregut.
B: 40 € per dia.

- Per a cadascuna de les dues tarifes, expresseu el cost del lloguer en funció del nombre t de dies de durada del viatge i del quilometratge x .
- Si s'han de fer 1000 km en 8 dies, a quina tarifa convé acollir-se? I si el viatge de 1000 km ha de durar 12 dies?
- Si hem de fer 1000 km, per a quina durada del viatge el cost és el mateix amb les dues tarifes? Expliqueu quina tarifa ens interessa escollir en funció del nombre de dies que duri el viatge.

Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt; apartat c) 2 punts. Total: 4 punts.

Solució: a) Les fórmules d'ambdues tarifes són:

$$\begin{cases} p_A(t, x) = 20t + 0,2x \\ p_B(t, x) = 40t \end{cases}$$

b) El preu a pagar per 1000km i per 8 i 12 dies de durada del viatge respectivament, depenent de la tarifa és:

Tarifa \ Dies	8	12
A	$20 \cdot 8 + 0,2 \cdot 1000 = 360$ €	$20 \cdot 12 + 200 = 440$ €
B	$40 \cdot 8 = 320$ €	$40 \cdot 12 = 480$ €

Per tant, si el viatge ha de durar 8 dies convé agafar la tarifa B i el preu serà de 320 €. Si ha de durar 12 dies convé agafar la tarifa A i el preu serà de 440 €.

c) El cost serà el mateix per ambdues tarifes quan $p_A(t, 1000) = p_B(t, 1000)$, és a dir, quan $20t + 200 = 40t$. El resultat és $t = 10$ dies. Si $t < 10$ és preferible la tarifa B i si $t > 10$ és preferible la tarifa A.

PAUTES COMPLEMENTÀRIES DE CORRECCIÓ DE MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS. SETEMBRE DE 2004

A fi d'unificar i matisar la puntuació dels exercicis, afegim unes valoracions per cada un dels subapartats de cada qüestió o problema:

1.
 - 0,5 punts per dir que els punts estan al contorn i buscar-los
 - 0,5 per torbar-los correctament
 - 0,5 per calcular els valors de f correctament i obtenir el valor màxim
 - 0,5 per afirmar que el màxim s'obté en tot el segment BC
2.
 - 1,0 punts pel gràfic
 - 0,5 punts per trobar els punts del contorn
 - 0,5 punts per trobar el màxim i el punt on és màxima f
3.
 - 1,0 punts pel plantejament
 - 1,0 punts per la resolució
4.
 - 1,0 punts per torbar que el sistema és compatible indeterminat
 - 1,0 per expressar correctament les solucions (qualsevol versió)
5.
 - 1,0 punt cada apartat
6.
 - 1,0 punts apartat a)
 - 1,0 punts apartat b)
 - 2,0 punts apartat c)