SÈRIE 3

Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals (ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar altres decimals per als diferents apartats i arrodonir després la suma). Aquestes pautes no pretenen planificar tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Hi haurà molts casos concrets, doncs, en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos en què les pautes siguin de difícil aplicació, feu prevaler sempre el vostre criteri i el sentit comú.

QÜESTIONS

1. Es van imposar 6000 € ara fa 3 anys i s'han recuperat 6652,31 €. Determineu la taxa anual equivalent (TAE).

Solució:

Els 6000 € a un interès anual equivalent r, esdevenen en 3 anys 6652,31 €. Per tant $6000 \cdot (1+r)^3 = 6652,31$. Aïllant r obtenim

$$\boxed{r = \sqrt[3]{\frac{6652,31}{6000}} - 1 = 0,035000 = 3,5\%}$$

que és la TAE demanada.

Puntuació: 2 punts.

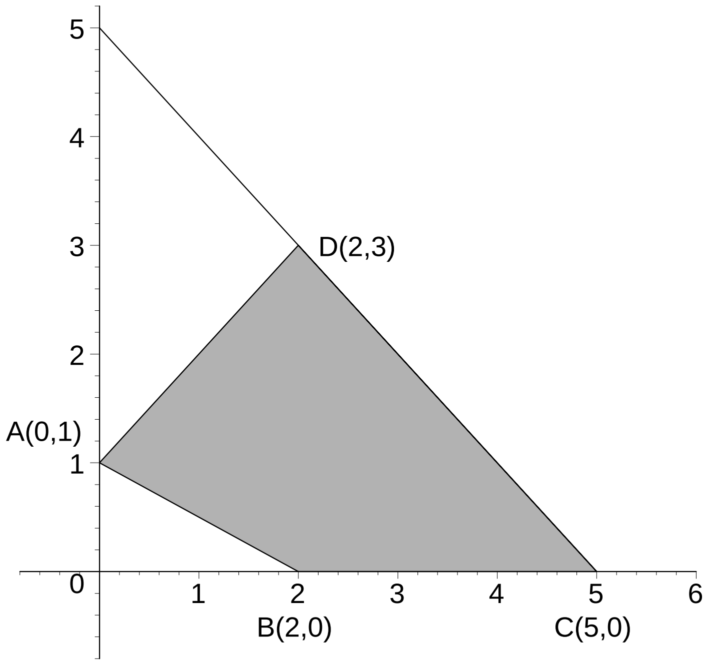
2. Dibuixeu la regió del pla determinada pel sistema d'inequacions següent:

$$\begin{cases} x + y \le 5 \\ -x + y \le 1 \\ x + 2y \ge 2 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

i calculeu el màxim de la funció $f(x,y) = 2x + 2y$ en aquesta regió.

Solució:

El gràfic és:



Els vèrtexs de la regió factible es determinen fàcilment fent les interseccions de les rectes i són els que figuren al gràfic i a la taula següent. Fem la taula per determinar el màxim.

Funció	$A(0,1)$	$B(2,0)$	$C(5,0)$	$D(2,3)$
$f(x,y)=2x+2y$	2	4	10	10

Per tant, el màxim s'assoleix en tot l'interval que està sobre la recta $x+y=5$ entre els punts $C(5,0)$ i $D(2,3)$. El valor màxim és $\boxed{10}$.

Puntuació: 1 punt per la gràfica i 1 punt pel màxim. Total: 2 punts.

3. Esbrineu si les gràfiques de la funció $f(x) = x^2 - 2x + 2$ i de la recta $y = 2x - 2$ són tangents en algun punt. En cas que ho siguin, determineu aquest punt. Hi ha algun altre punt d'intersecció entre la recta i la gràfica de la funció?

Solució:

Determinem la intersecció de la recta i la paràbola resolent el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{r} y = x^2 - 2x + 2 \\ y = 2x - 2 \end{array}\right\}$$

Igualant els valors de y obtenim l'equació $x^2 - 4x + 4 = 0$, que té la solució doble $x = 2$. Per tant es tracta d'un punt doble de tangència i és la única intersecció entre la recta i la paràbola. El valor de la y és 2. Per tant, el punt de tangència és $\boxed{(2,2)}$.

Puntuació: 2 punts.

4. Considereu un sistema de dues equacions lineals amb dues incògnites i amb coeficients reals. És possible que el sistema tingui exactament dues solucions? I exactament tres solucions? Justifiqueu les respostes.

Solució:

No és possible que tingui ni 2 ni 3 solucions exactament, ja que si un sistema lineal amb coeficients reals té més d'una solució, és indeterminat i llavors té infinites solucions.

Puntuació: 2 punts.

PROBLEMES

5. Disposem de material per a poder impermeabilitzar 200 m^2 de superfície. Volem fer una bassa de base rectangular en la qual la llargada mesuri el triple que l'amplada i amb la profunditat adequada per a gastar tot el material. Interessa que el volum d'aigua que càpiga a la bassa sigui màxim.

a) Escriviu la relació que hi ha entre l'altura i el costat petit de la base de la bassa.
b) Escriviu la funció que dóna la capacitat de la bassa en funció del costat petit de la base.
c) Calculeu les dimensions de la bassa per tal que la capacitat sigui màxima. (Els resultats s'han de precisar fins als centímetres).
d) Determineu-ne el volum.

Solució:

a) Anomenem x al costat petit de la base i y a la profunditat. La superfície total a impermeabilitzar és $S = 3x \cdot x + 2x \cdot y + 2 \cdot 3x \cdot y = 3x^2 + 8xy$, que ha de ser igual a 200. Per tant la relació demanada és $\boxed{3x^2 + 8xy = 200}$.

b) El volum de la bassa, expressat en termes de x, serà

$$\boxed{V = 3x \cdot x \cdot y = 3x^2 y = 3x \cdot \frac{200 - 3x^2}{8}}.$$

c) Per tal que la capacitat sigui màxima igualem la derivada a 0 per obtenir els extrems relatius. $V'(x) = \frac{3}{8}\left(200 - 9x^2\right)$, i igualant a 0 obtenim $x^2 = \frac{200}{9}$. Dels dos valors de x, únicament un és positiu i té sentit en el problema. Per tant, $V(x)$ té un extrem relatiu per $\boxed{x = \frac{10\sqrt{2}}{3} = 4{,}71 \text{ m}}$. Es tracta d'un màxim ja que la funció és una paràbola amb vèrtex cap a munt (el signe del coeficient de x^2 és negatiu). Per tant és el valor buscat. El costat llarg serà

$\boxed{3x = 10\sqrt{2} = 14{,}14 \text{ m}}$, i la profunditat $\boxed{y = \frac{200 - 3x^2}{8x} = \frac{200 - \frac{200}{3}}{\frac{80\sqrt{2}}{3}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = 3{,}54 \text{ m}}$.

d) Finalment el volum és $\boxed{V = \frac{10\sqrt{2}}{3} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{4} = \frac{500\sqrt{2}}{3} = 235{,}702 \text{ m}^3}$.

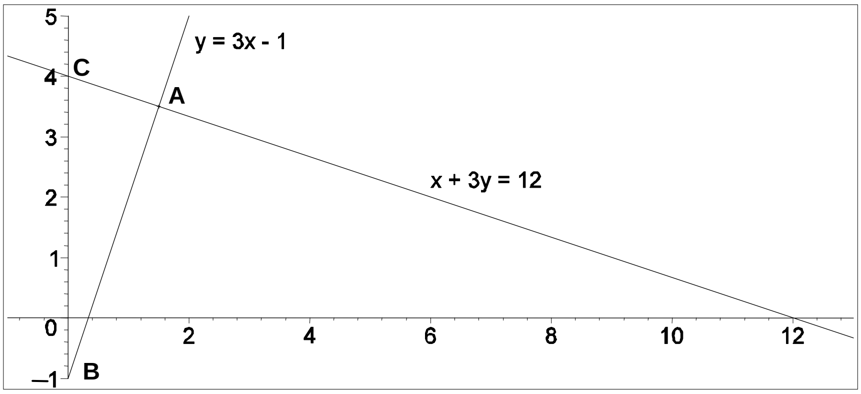
Puntuació de cada apartat 1 punt. Total: 4 punts.

6.

a) Dibuixeu el gràfic de les rectes $3x - y - 1 = 0$ i $x + 3y - 12 = 0$.
b) Demostreu que les dues rectes anteriors són perpendiculars.
c) Calculeu el punt d'intersecció de les dues rectes.
d) Considereu el triangle format per les dues rectes anteriors i per l'eix d'ordenades. Calculeu-ne l'àrea.

Solució:

a) Fem el gràfic. La recta $3x - y - 1 = 0$ talla els eixos en els punts $(0,-1)$ i $\left(\frac{1}{3},0\right)$. La recta $x + 3y = 12$ talla els eixos en els punts $(12,0)$ i $(0,4)$.



b) Els vectors perpendiculars a la primera i segona rectes són $(3,-1)$ i $(1,3)$. Fem el producte escalar i tenim $\boxed{3\cdot 1 + (-1)\cdot 3 = 0}$, i per tant són perpendiculars.

c) La intersecció l'obtenim resolent el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x - y & = & 1 \\ x + 3y & = & 12 \end{array}\right\}$$

que dóna com a resultat el punt $\boxed{\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)}$.

d) El triangle *ABC* té base *CB* = $4-(-1)=5$ i altura sobre *A* de longitud $\frac{3}{2}$ (abscissa de *A*). Per tant, la seva superfície és: $\boxed{S = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{3}{2} = \frac{15}{4} = 3{,}75}$.

Puntuació de cada apartat 1 punt. Total: 4 punts.