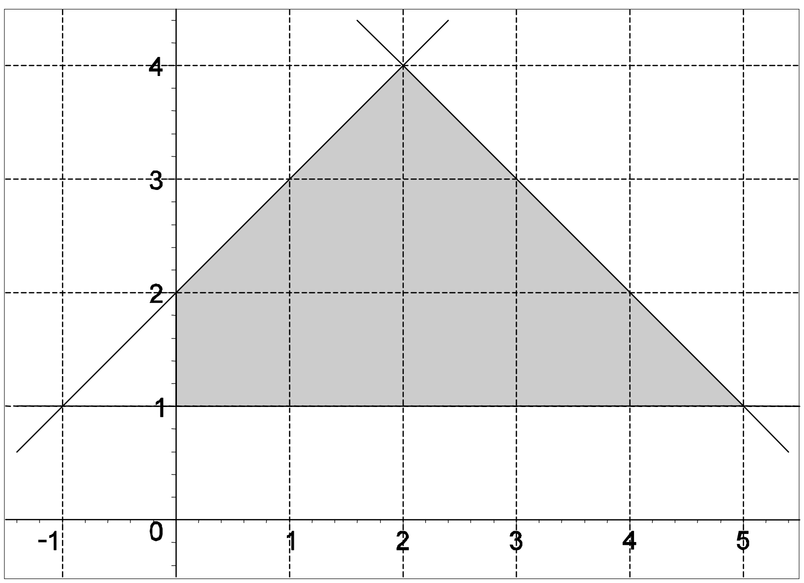
## SÈRIE 2

Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals (ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar altres decimals per als diferents apartats i arrodonir després la suma). Aquestes pautes no pretenen planificar tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Hi haurà molts casos concrets, doncs, en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos en què les pautes siguin de difícil aplicació, feu prevaler sempre el vostre criteri i el sentit comú.

QÜESTIONS

**1.** Determineu el sistema de quatre inequacions amb dues incògnites que té per solució el polígon ombrejat dibuixat en la gràfica següent, suposant que els costats també són solució.




Solució:

Les rectes que delimiten el triangle tenen per equacions $y=1$, $x=0$, $y=x+2$ i $x+y=6$. Observant que passa fixada la $x$ i variant la $y$ en direcció al semiplà ombrejat obtenim les inequacions $\boxed{y \geq 1,\ x \geq 0,\ y \leq x+2 \text{ i } x+y \leq 6}$.

Puntuació: 2 punts.

**2.** Una entitat financera ofereix un pla de jubilació que garanteix un 40% d'interès en 10 anys. Determineu la taxa anual equivalent (TAE) que garanteix.

Solució:

Al cap de 10 anys, una unitat monetària a un interès anual equivalent $r$ s'haurà convertit en $(1+r)^{10}$. Com que el capital garantit augmenta en un 40%, el valor anterior ha de ser igual a 1,40. Per tant, la taxa anual equivalent és:

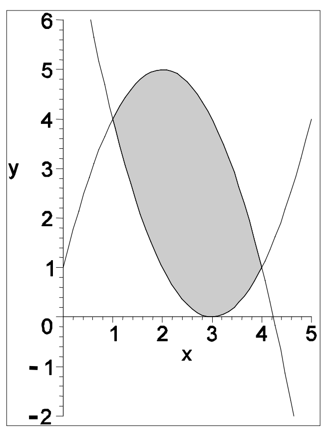
$$\boxed{r=\sqrt[10]{1,4}-1=0,03422=3,42\%}$$

Puntuació: 2 punts.

**3.** Determineu l'àrea finita compresa entre les dues paràboles $y=-x^2+4x+1$ i $y=x^2-6x+9$

Solució:

Fem la gràfica de les dues paràboles.




Determinem les interseccions. Igualant les ordenades: $-x^2+4x+1=x^2-6x+9$. Per tant $x^2-5x+4=0$, que dóna com a solucions $x=1$ i $x=4$. Per tant s'ha de calcular la integral de la diferència de les dues paràboles entre 1 i 4:

$$S=\int_1^4\left(-x^2+4x+1\right)-\left(x^2-6x+9\right)dx=\int_1^4\left(-2x^2+10x-8\right)dx=$$

$$\left[-\frac{2x^3}{3}+5x^2-8x\right]_1^4=-\frac{128}{3}+80-32-\left(-\frac{2}{3}+5-8\right)=9$$

Puntuació: 2 punts.

**4.** Expliqueu quina condició han de verificar $A$ i $B$ si les rectes d'equacions

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{i} \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3}$$

a) són paral·leles;
b) són perpendiculars.

Solució:

a) Si les rectes són paral·leles, el vector perpendicular a la primera recta $(A, B)$ ha de ser perpendicular al vector director de la segona $(2,3)$. Per tant la condició és $2A + 3B = 0$.
b) Si les rectes han de ser perpendiculars, el vector director de la primera recta $(-B, A)$ ha de ser perpendicular al vector director de la segona $(2,3)$. Per tant la condició és $-2B + 3A = 0$.

Puntuació de cada apartat, 1 punt. Total: 2 punts.

PROBLEMES

**5.** Com a resultat del test efectuat amb un nou model d'automòbil per determinar-ne el consum de benzina, s'ha observat que, per a unes velocitats compreses entre 25 i 175 km/h, el consum $C(x)$ de gasolina, expressat en litres consumits en 100 km, fets a la velocitat constant de $x$ km/h, es pot aproximar per la funció

$$C(x) = 7,5 - 0,05x + 0,00025x^2 .$$

a) Determineu el consum a les velocitats de 50 km/h i de 150 km/h.
b) A quina velocitat s'obté el mínim consum? Quin és aquest consum mínim?
c) Feu un estudi del creixement i decreixement de la funció $C(x)$ a l'interval $[25,175]$. Determineu les velocitats que corresponen a consum màxim, així com aquest consum.

Solució:

a) $\begin{cases} C(50) = 7,5 - 0,05 \cdot 50 + 0,00025 \cdot 50^2 = 5,625 \\ C(150) = 7,5 - 0,05 \cdot 150 + 0,00025 \cdot 150^2 = 5,625 \end{cases}$ litres en 100 km.

b) La gràfica de $C(x)$ és una paràbola que té un mínim absolut. Per determinar-lo igualem la derivada $C'(x) = -0,05 + 0,0005x$ a 0 i obtenim $\boxed{x = 100 \text{ km/h}}$. Per aquesta velocitat el consum és $\boxed{C(100) = 5 \text{ litres en 100 km}}$, que serà el consum mínim.

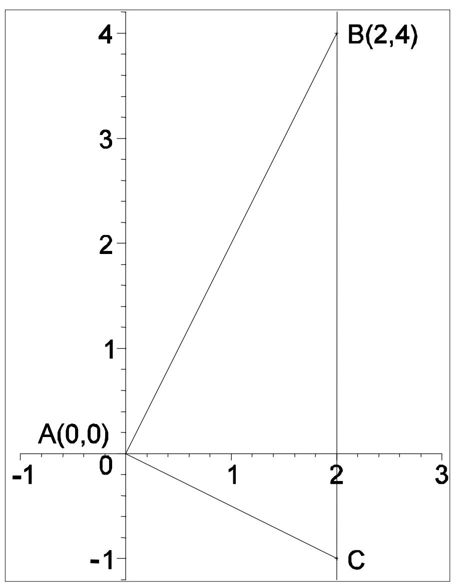
c) La funció derivada $C'(x)$ s'anul·la per $x = 100$, on té el mínim. Per valors de $x$ inferiors, esdevé negativa, ja que el coeficient de la $x$ és positiu i per tant, al disminuir la $x$ a partir del valor que anul·la la derivada, aquesta esdevindrà negativa. A l'inrevés passa quan $x$ s'incrementa a partir d'aquest valor. Per tant la funció és decreixent en l'interval $(-\infty, 100)$ i creixent en l'interval $(100, +\infty)$, i assoleix el mínim absolut i relatiu en el punt $(100, 5)$. El màxim absolut en l'interval $[25, 175]$ s'assolirà en un dels dos extrems de l'interval (o en tots dos).
Obtenim els valors $\boxed{C(25) = C(175) = 6,41 \text{ litres en 100 km}}$, que és el consum màxim que s'assolirà per les dues velocitats de 25 i 175 km/h.

Puntuació: Apartat a) 0.5 punts, apartat b) 2 punts, apartat c) 1.5 punts. Total: 4 punts.

**6.** Un triangle rectangle té el vèrtex $A$, corresponent a l'angle recte, a l'origen de coordenades. Un altre dels seus vèrtexs és el punt $B(2,4)$ i la hipotenusa té per equació la recta $x = 2$. Calculeu

a) les equacions dels costats $AB$ i $AC$;
b) el tercer vèrtex $C$;
c) l'àrea del triangle.

Solució:




a) La recta $AB$ té per equació $y = 2x$. La recta $AC$ és perpendicular a l'anterior i passa també pel punt $A(0,0)$. Per tant tindrà pendent $-\frac{1}{2}$ i la seva equació serà $y = -\frac{1}{2}x$.

b) El tercer vèrtex $C$ és la intersecció de les dues rectes $y = -\frac{1}{2}x$ i $x = 2$, per tant és el punt $\boxed{C(2,-1)}$.

c) La hipotenusa del triangle és vertical i per tant, la seva longitud és $y_B - y_C = 4 - (-1) = 5$. L'altura sobre la hipotenusa és simplement $x_C = x_B = 2$. Per tant l'àrea del triangle és $S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 5$.

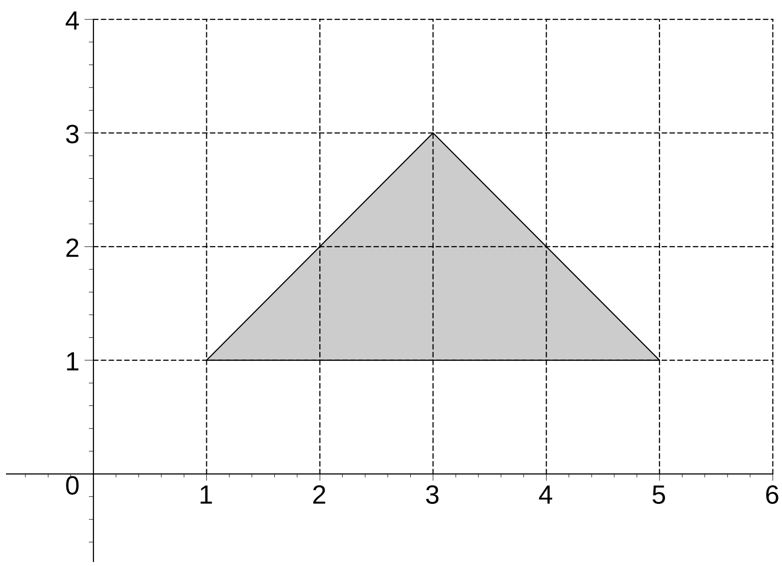
Puntuació: apartat a) 2 punts, apartats b) i c) 1 punt cadascun. Total: 4 punts.

## SÈRIE 5

Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals (ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar altres decimals per als diferents apartats i arrodonir després la suma). Aquestes pautes no pretenen planificar tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Hi haurà molts casos concrets, doncs, en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos en què les pautes siguin de difícil aplicació, feu prevaler sempre el vostre criteri i el sentit comú.

QÜESTIONS

**2.** Doneu el sistema de tres inequacions amb dues incògnites que té per solució el triangle assenyalat en la gràfica següent, suposant que els costats del triangle també formen part de la solució.




Puntuació: 2 punts.

Solució:

Les rectes que delimiten el triangle tenen per equacions $y=1$, $y=x$ i $x+y=6$. Observant que passa fixada la $x$ i variant la $y$ en direcció al semiplà ombrejat obtenim les inequacions $\boxed{y\geq 1,\quad y\leq x \quad \text{i} \quad x+y\leq 6}$.

**7.** La funció $f(x) = -5ax^2 + 700x + 1440$ té un extrem relatiu per $x = 10$. Calculeu el valor de $a$.

Puntuació: 2 punts.

Solució:

La derivada és $f'(x) = -10ax + 700$. Per $x = 10$ s'anul·la. Per tant resulta $f'(10) = -100a + 700 = 0$, d'on obtenim $\boxed{a = 7}$.

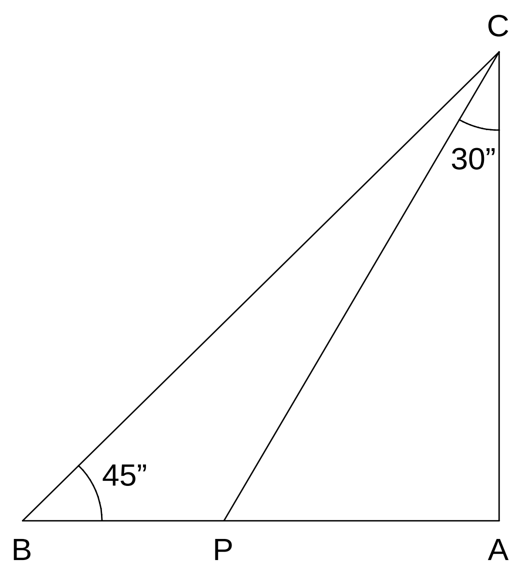
**8.** Considereu els punts del pla $A(2,-1)$ i $B(0,3)$ i la recta $r$ d'equació $x + y - 2 = 0$. Calculeu les coordenades d'un punt $C$ de $r$ que estigui alineat amb $A$ i $B$.

Puntuació: 2 punts.

Solució:

La recta $AB$ té per equació $y + 1 = -2(x - 2)$. Hem de trobar la intersecció amb la recta $x + y - 2 = 0$. Resolent el sistema obtenim el punt $\boxed{C(1,1)}$.

**9.** Calculeu el perímetre del triangle rectangle $ABC$, sabent que la longitud del segment $CP$ és $2\sqrt{3}$.




Puntuació: 2 punts.

Solució:

Considerant el triangle rectangle $APC$ obtenim $AC = PC\frac{\sqrt{3}}{2} = 3$. Per ser $ABC$ un triangle isòsceles resulta $AB = AC = 3$. Com a més a més és rectangle, la hipotenusa és $BC = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Per tant el perímetre és $\boxed{p = 6 + 3\sqrt{2}}$.

PROBLEMES

**10.** Hem demanat un préstec de 1000 € a retornar en 2 anys a un interès del 8 % nominal (s'entén compost i anual). El crèdit es retorna pagant quotes mensuals iguals al finalitzar cada mes. Una part de la quota mensual serveix per anar amortitzant el deute i l'altra correspon als interessos que ha generat aquest deute. La part de la quota mensual que correspon als interessos s'obté aplicant el tipus d'interès al capital pendent abans de pagar la quota i la resta serveix per a amortitzar el deute.

d) Quina quota fixa mensual haurem de pagar per eixugar el préstec?
e) Quina quantitat del deute hem amortitzat amb la primera quota?
f) Quin capital ens queda pendent d'amortitzar després d'haver abonat la segona quota?

Puntuació: apartats a) i c): 1.5 punts cadascun; apartat b): 1 punt.Total: 4 punts.

Solució:

a) Fixem la data focal al final dels dos anys. El capital de $1000$ € a un interès del 8% mensual acumulat haurà esdevingut en 12 mesos $1000\cdot\left(1+\frac{0,08}{12}\right)^{24}$ €. La primera quota $a$ abonada al final del primer mes haurà esdevingut $a\left(1+\frac{0,08}{12}\right)^{23}$ € i les restants tindran la mateixa expressió amb exponents decreixents fins a la darreara quota que s'abona al final, i té el valor $a$. Per tant, les quotes valorades a la data focal formen una progressió aritmètica de raó $1+\frac{0,08}{12}$ que hem de sumar. Aquesta suma és $a\frac{\left(1+\frac{0,08}{12}\right)^{24}-1}{\frac{0,08}{12}}$. Resulta doncs

$$1000\cdot\left(1+\frac{0,08}{12}\right)^{24}=a\frac{\left(1+\frac{0,08}{12}\right)^{24}-1}{\frac{0,08}{12}}$$

d'on obtenim la quota

$$\boxed{a=1000\frac{0,08}{12}\frac{\left(1+\frac{0,08}{12}\right)^{24}}{\left(1+\frac{0,08}{12}\right)^{24}-1}=45,23\ €}.$$

b) Fem la taula mes per mes dels valors del capital abans d'abonar la quota, els interessos devengats, la quota abonada, el capital amortitzat i el capital pendent:

| Mes | Capital inicial | Interessos devengats | Quota Abonada | Capital Amortitzat | Capital pendent |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1000 | $1000\frac{0,08}{12}=6,67$ | 45,23 | $45,23-6,67=$ $38,56$ | $1000-38,56=$ $961,44$ |
| 2 | 961,44 | 6,41 | 45,23 | 38,22 | 922,62 |

Per tant, el capital amortitzat després d'abonada la primera quota és de $\boxed{38,56\ €}$.

c) A partir de la taula anterior obtenim el capital pendent després d'abonar la segona quota que és de $\boxed{922,44\ €}$.

**11.** Amb un llistó de fusta de 300 cm de llarg volem fabricar el marc d'un quadre.

a) Determineu la relació que hi ha entre la base i l'alçada del marc.
b) Determineu la funció que expressa la superfície del quadre en termes de la base del marc.
c) Feu un gràfic d'aquesta funció on es posin de manifest els seus intervals de creixement i decreixement i els extrems relatius.
d) Trobeu les dimensions del marc que fan màxima la superfície del quadre. Trobeu el valor de la superfície.

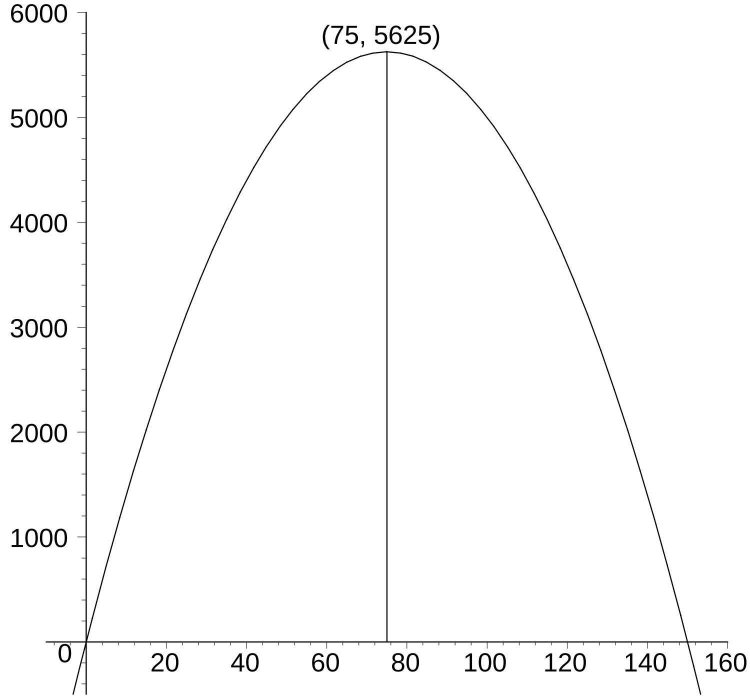
Puntuació de cada apartat 1 punt. Total: 4 punts.

Solució:

a) Anomenant $x$ a la base del marc i $y$ a l'alçada tenim $2(x+y)=300$, que simplificada dóna: $\boxed{x+y=150}$.
b) La superfície del quadre expressada en termes de $x$ resulta

$$\boxed{S(x)=xy=x(150-x)=-x^2+150x}$$

c) El gràfic de $S(x)$ és una paràbola. El vèrtex (màxim) s'obté igualant la derivada $S'(x) = -2x + 150$ a 0, d'on resulta el punt $(75, 5625)$. Les interseccions amb l'eix de les $x$ són $x = 0$ i $x = 150$. Per tant el gràfic és el següent:




d) Com hem vist a l'apartat c) el màxim de $S(x)$ és el punt $(75, 5625)$. Es tracta realment d'un màxim ja que la paràbola té el coeficient de $x^2$ negatiu. El valor de la superfície és $\boxed{S(75) = 5625 \text{ cm}^2}$.