SÈRIE 1

Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals (ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar altres decimals per als diferents apartats i arrodonir després la suma). Aquestes pautes no pretenen planificar tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Hi haurà molts casos concrets, doncs, en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos en què les pautes siguin de difícil aplicació, feu prevaler sempre el vostre criteri i el sentit comú.

Qüestions

1. Considereu la corba d'equació $f(x) = x^3 - x$.

a) Calculeu els punts en què la gràfica de $f(x)$ talla l'eix d'abscisses i expliqueu raonadament on $f(x)$ és positiva i on és negativa.

b) Trobeu l'àrea del recinte limitat per la part positiva de la gràfica de $f(x)$ i el semieix negatiu d'abscisses.

Puntuació: Cada apartat val 1 punt. Total: 2 punts.

Solució:

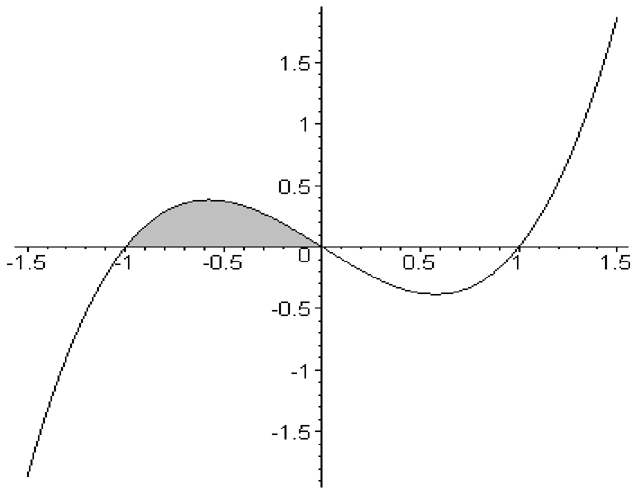
a) Factoritzem $f(x)$:

$$f(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1).$$

Per tant té tres zeros reals que són $x = -1$, $x = 0$, i $x = 1$. En cada un dels intervals compresos entre els zeros la funció té signe constant, que podem determinar mirant el signe de cada factor. El resultat és:

x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
y	$y < 0$	$y = 0$	$y > 0$	$y = 0$	$y < 0$	$y = 0$	$y > 0$

Fem un esbós de la gràfica de la corba i l'àrea a determinar:



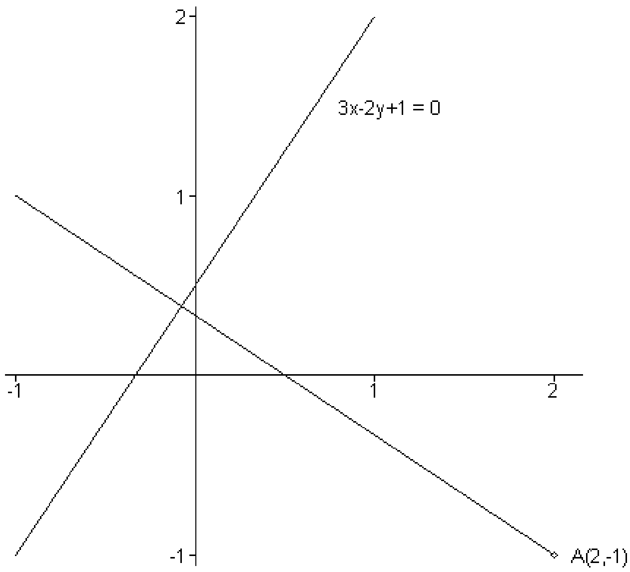
b) Calculem l'àrea demanada:

$$\int_{-1}^{0}\left(x^3-x\right)\cdot dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{4}$$

2. El costat BC d'un triangle està sobre la recta d'equació $3x-2y+1=0$. El vèrtex A té coordenades $(2,-1)$. Determineu el peu de l'altura relativa a A.

Puntuació: Plantejament: 1 punt. Determinació del peu de l'altura: 1 punt. Total: 2 punts.

Solució: Fem un esbós de la gràfica:



L'equació de l'altura, perpendicular al costat BC que passa per $A(2,-1)$ és

$$2(x-2)+3(y+1)=0$$

és a dir: $2x+3y=1$. El peu de l'altura és el punt d'intersecció d'ambdues rectes, o sigui la solució del sistema:

$$\left.\begin{array}{r}3x-2y=-1\\2x+3y=1\end{array}\right\}$$

que és: $x=-\dfrac{1}{13}$, $y=\dfrac{5}{13}$.

Per tant, el peu de l'altura és $\boxed{A'=\left(-\dfrac{1}{13},\dfrac{5}{13}\right)}$

3. Determineu per a quin valor del paràmetre λ el sistema següent

$$\begin{cases} x-3y+5z=2 \\ 2x-4y+2z=1 \\ 5x-11y+9z=\lambda \end{cases}$$

és compatible i, en aquest cas, resoleu-lo.

Puntuació: Determinació de λ : 1 punt. Resolució del sistema: 1 punt. Total: 2 punts.

Solució: Pel mètode de Gauss resulta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 9 & \lambda \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & -8 & -3 \\ 0 & 4 & -16 & \lambda-10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-4 \end{array}\right)$$

Per a tot $\lambda \neq 4$ el sistema és incompatible. Per $\boxed{\lambda = 4}$ és compatible. Calculem la solució:

$$z = z$$

$$y = 4z - \frac{3}{2}$$

$$x = 3y - 5z + 2 = 12z - \frac{9}{2} - 5z + 2 = 7z - \frac{5}{2}$$

que correspon a la solució vectorial:

$$\boxed{(x, y, z) = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right) + z(7,4,1)}$$

Nota: S'acceptarà qualsevol mètode de resolució i qualsevol solució completa. Les solucions que no comportin 1 grau de llibertat no es puntuaran (0 punts per la solució del sistema).

4. En començar l'any 2001, el nombre de refugiats sota l'empara de l'ACNUR (organisme de l'ONU) era de 12,10 milions.

a) Durant l'any 2000 el nombre de refugiats va augmentar un 4%. Quants n'hi havia en començar l'any 2000?

b) Durant l'any 2001 el nombre de refugiats va augmentar un 10%. Quants n'hi havia al final del 2001?

c) Suposant que a partir del 2002 hi haurà una disminució del 10% anual, en quin any hi arribarà a haver menys d'un milió de refugiats?

Puntuació: Apartats a) i b): 0,5 punts cadascun. Apartat c): 1 punt. Total: 2 punts.

Solució:

a) En començar l'any 2000 n'hi havia: $\frac{12,1}{1,04} = \boxed{11,63}$ milions.

b) A finals de 2001 n'hi havia: $12,1 \cdot 1,10 = \boxed{13,31}$ milions.

c) Sigui t el nombre d'anys comptats a partir de l'inici de 2002. Seguint la hipòtesi, el nombre de refugiats en funció de t ha de ser menor que 1. En fórmula:

$$13,31 \cdot (0.9)^t < 1$$

O sigui:

$$(0.9)^t < \frac{1}{13,31}.$$

Prenent logaritmes resulta:

$$t \cdot \log 0,9 < -\log 13,31$$

d'on finalment:

$$t > -\frac{\log 13,31}{\log 0,9} = 24,57$$

és a dir, que hi haurà menys d'un milió d'habitants en arribar a la data de $\boxed{2026,57}$, és a dir, $\boxed{\text{durant l'any 2026}}$, o més precisament cap a mitjans de 2026.

Nota: Per cada error en un apartat que correspongui a un còmput equivocat de l'inici o de la fi del període es restaran 0,26 punts. Calcular el valor de t però oblidar-se d'obtenir la data final explícita en l'apartat c) restarà 0,26 punts. Acceptem com a correcte la resposta 2026 o 2027. Arrodoniu la nota final resultant a mig punt.

Problemes

5. Considereu la funció $f(x) = 2002x^2 + ax + b + \sin x$, amb a, b reals. Calculeu els valors dels paràmetres a, b per tal que f passi pel punt $(0,3)$ i tingui un extrem relatiu en aquest punt. Expliqueu raonadament quin tipus d'extrem té f en aquest punt.

Puntuació: Plantejament: 1 punt. Determinació de a i b : 2 punts. Determinació del tipus d'extrem: 1 punt. Total: 4 punts.

Solució: Si volem que la funció passi pel punt $(0,3)$, hem d'imposar $f(0) = 3$, d'on resulta $\boxed{b = 3}$. Si, a més, ha de tenir un extrem relatiu en $x = 0$, cal que la seva derivada s'anul·li en $x = 0$. La funció derivada és:

$$f'(x) = 4004x + a + \cos x,$$

que s'ha d'anul·lar per $x = 0$. Resulta doncs: $a + 1 = 0$. O sigui: $\boxed{a = -1}$

Per saber quin tipus d'extrem és, el més senzill és calcular la derivada segona i estudiar el seu signe:

$$f''(x) = 4004 - \sin x$$

que en el punt $x = 0$ val $4004 > 0$. Per tant, es tracta d'un $\boxed{\text{mínim}}$.

6. Un entusiasta de la salut vol tenir un mínim de 36 unitats de vitamina A, 28 unitats de vitamina C i 32 unitats de vitamina D al dia. Cada pastilla de la marca 1 costa 0,03 € i proporciona 2 unitats de vitamina A, 2 de C i 8 de D. Cada pastilla de la marca 2 costa 0,04 € i proporciona 3 unitats de vitamina A, 2 de C i 2 de D. Quantes pastilles de cada marca haurà de comprar per a cada dia si vol cobrir les necessitats bàsiques amb el menor cost possible?

Puntuació: Total: 4 punts.

Solució: Fem un esquema amb les dades de l'enunciat:

	Quantitat	A	C	D	Cost
Marca 1	x	$2x$	$2x$	$8x$	$0,03x$ €
Marca 2	y	$3y$	$2y$	$2y$	$0,04y$ €
Condicions	$x \geq 0, y \geq 0$	$2x+3y \geq 36$	$2x+2y \geq 28$	$8x+2y \geq 32$	$C = \dfrac{3x+4y}{100}$

Per tant s'ha de minimitzar el cost $C = 0,03x + 0,04y$ subjecte a les condicions

$$\begin{aligned} 2x+3y &\geq 36 \\ 2x+2y &\geq 28 \\ 8x+2y &\geq 32 \\ x \geq 0&;\ y \geq 0 \end{aligned}$$

Les interseccions són:

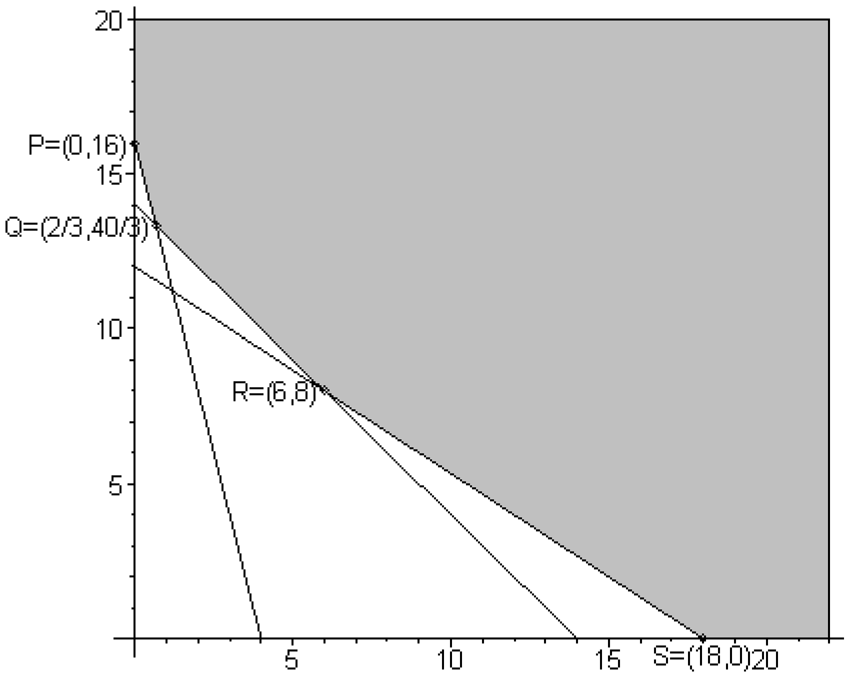
$$\left.\begin{array}{r} x=0 \\ 8x+2y=32 \end{array}\right\} P=(0,16)$$

$$\left.\begin{array}{r} 8x+2y=32 \\ 2x+2y=28 \end{array}\right\} Q=\left(\frac{2}{3},\frac{40}{3}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x+2y=28 \\ 2x+3y=36 \end{array}\right\} R=(6,8)$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=36 \\ y=0 \end{array}\right\} S=(18,0)$$

El gràfic de la regió factible és:



Finalment, trobem el punt on el cost és mínim, que sabem que s'obté en un vèrtex (o en un costat).

	$P=(0,16)$	$Q=\left(\frac{2}{3},\frac{40}{3}\right)$	$R=(6,8)$	$S=(18,0)$
$C=0,03x+0,04y$	$0,64$	$\frac{166}{300}=0,5533$	$0,50$	$0,54$
			Cost mínim	

El cost mínim s'obtindrà prenent $\boxed{\text{6 pastilles de la marca 1 i 8 pastilles de la marca 2}}$. El cost és llavors de $\boxed{\text{0,50 € per dia}}$.

Nota: Si la solució del problema es fa pel mètode descrit aquí, es puntuarà així: Esquema i restriccions: 1,5 punts. Determinació dels vèrtexs i gràfic de la regió factible: 1,5 punts. Determinació dels valors que fan mínim el cost i el cost mínim: 1 punt. Aquesta proposta de puntuació és indicativa, ja que les variants de les respostes han de ser valorades a criteri del corrector. Sempre que el raonament i el resultat siguin correctes es valorarà en quatre punts el problema.